Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 45m **Teste 2A** 7/11/08

SOLUÇÕES

---

1. Exprima as seguintes somas na notação abreviada de somatório:

   (a) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{500}$. R.: $\sum_{i=1}^{250} a_{2i}$

   (b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 10$. R.: $\sum_{i=1}^{30} \frac{i}{3}$

2. Calcule os seguintes somatórios:

   (a) $\sum_{i=1}^{n} n$. R.: n^2

   (b) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i-j)$. R.: 3

   (c) Somatório do exercício 1(b). R.: 155

   (d) $\sum_{j=1}^{20}\sum_{k=0}^{9} 2j(k+1)$. R.: 23100

3. Considere o algoritmo seguinte que permite calcular o valor da função *somaneg* em cada inteiro positivo n dado.

```
procedure somaneg (n: inteiro positivo)
somaneg := 0    {valor inicial da somaneg}
for i := 1 to n
   for j := 1 to i
      somaneg := somaneg − 2;
```

   (a) Calcule *somaneg*(4). R.: -20

   (b) Determine *somaneg*(n). R.: $-n(n+1)$

RESOLUÇÃO

2(a) $\sum_{i=1}^{n} n = \underbrace{n+n+\cdots+n}_{n \text{ vezes}} = n \times n = n^2.$

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i-j) &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2} i - \sum_{j=1}^{2} j\right) = \sum_{i=1}^{3}(2i-3) = 2\sum_{i=1}^{3} i - 3\sum_{i=1}^{3} 1 = \\ &= 2\times(1+2+3) - 3\times(1+1+1) = 2\times 6 - 3\times 3 = 3.\end{aligned}$$

(c) $\sum_{i=1}^{30} \frac{i}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{30} i = \frac{1}{3} \times \frac{30\times 31}{2} = \frac{30\times 31}{6} = 5\times 31 = 155.$

(d)
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{20}\sum_{k=0}^{9} 2j(k+1) &= 2\sum_{j=1}^{20} j \sum_{k=0}^{9}(k+1) = 2\sum_{j=1}^{20} j \sum_{k=1}^{10} k = \\ &= 2\times \frac{20\times 21}{2} \times \frac{10\times 11}{2} = 2\times 210 \times \times 55 = 23100.\end{aligned}$$

3(a) `SIMULAÇÃO:`

`INPUT:`	$n := 4.$	
		$somaneg := 0$
$\boxed{i=1}$		
	$\boxed{j=1}$	$somaneg := 0-2 = -2$
$\boxed{i=2}$		
	$\boxed{j=1}$	$somaneg := -2-2 = -4$
	$\boxed{j=2}$	$somaneg := -4-2 = -6$
$\boxed{i=3}$		
	$\boxed{j=1}$	$somaneg := -6-2 = -8$
	$\boxed{j=2}$	$somaneg := -8-2 = -10$
	$\boxed{j=3}$	$somaneg := -10-2 = -12$
$\boxed{i=4}$		
	$\boxed{j=1}$	$somaneg := -12-2 = -14$
	$\boxed{j=2}$	$somaneg := -14-2 = -16$
	$\boxed{j=3}$	$somaneg := --16-2 = -18$
	$\boxed{j=4}$	$somaneg := -18-2 = -20.$
`OUTPUT:`	$somaneg(4) = -20.$	

Como o valor inicial da variável *somaneg* é 0 e em cada passo dos dois ciclos do algoritmo este valor decresce duas unidades, então

$$somaneg(4) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i} -2 = -2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i} 1 = -2\sum_{i=1}^{4} i = -2(1+2+3+4) = -20.$$

(b) De modo análogo, usando a fórmula para a soma dos primeiros n naturais obtida nas aulas,

$$somaneg(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} -2 = -2\sum_{i=1}^{n} i = -2\frac{n(n+1)}{2} = -n(n+1).$$

As resoluções dos restantes testes são análogas.

SOLUÇÕES

TESTE 2B	TESTE 2C	TESTE 2D
1(a) -15	1(a) $\sum_{i=0}^{250} x_{2i}$	1(a) -10
(b) $-\frac{n(n+1)}{2}$	(b) $\sum_{i=1}^{30} \frac{i}{3}$	(b) $-\frac{n(n+1)}{2}$
2(a) $\sum_{i=1}^{333} x_{3i}$	2(a) k^2	2(a) $\sum_{i=0}^{333} a_{3i}$
(b) $\sum_{i=1}^{40} \frac{i}{2}$	(b) 3	(b) $\sum_{i=1}^{40} \frac{i}{2}$
3(a) nk	(c) 155	3(a) nk
(b) 3	(d) 23100	(b) 3
(c) 410	3(a) -12	(c) 410
(d) 23100	(b) $-n(n+1)$	(b) 23100
