

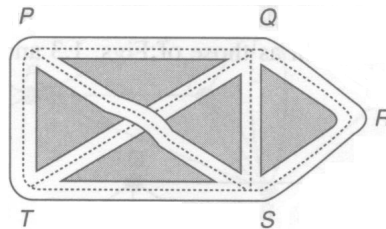
2. Teoria dos Grafos

2.1. Grafos

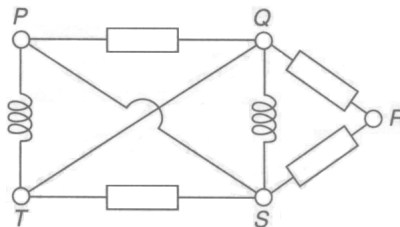
Noções básicas

A Teoria dos Grafos é actualmente uma das áreas mais importantes da matemática discreta. Tendo as suas raízes em jogos e recreações matemáticas, atribui-se a sua criação a Euler, ao resolver o problema das pontes de Königsberg em 1736, mas foram os problemas acerca de fórmulas de estrutura de compostos químicos, que A. Cayley resolveu na segunda metade do século XIX, que a começaram a desenvolver. Hoje, a Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas (Informática, Investigação Operacional, Economia, Sociologia, Genética, etc.), pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objectos discretos de qualquer tipo.

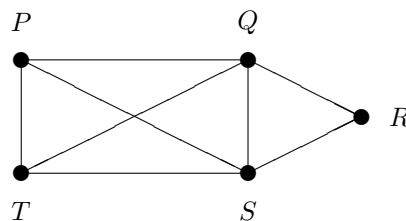
Por exemplo, a seguinte secção de um mapa de estradas



ou a seguinte secção de uma rede eléctrica



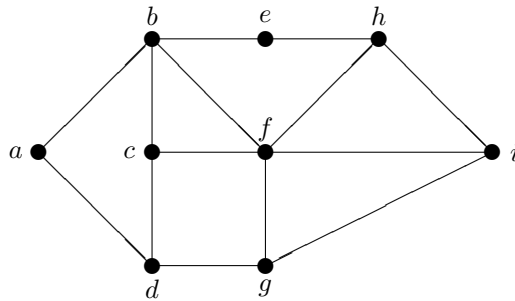
podem ser ambas representadas por meio de pontos e segmentos de recta do seguinte modo:



Um *grafo simples* G consiste num conjunto finito e não vazio $V(G)$ de elementos chamados *vértices* e num conjunto finito $A(G)$ de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$, chamados *arestas*.

Dois vértices a e b de G dizem-se *adjacentes* se o par $\{u, v\}$ pertence a $A(G)$. Habitualmente representa-se um grafo simples $G = (V(G), A(G))$ por um diagrama no qual os vértices são representados por pontos e as arestas por linhas unindo vértices adjacentes.

Por exemplo, o diagrama



representa o grafo G definido por

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

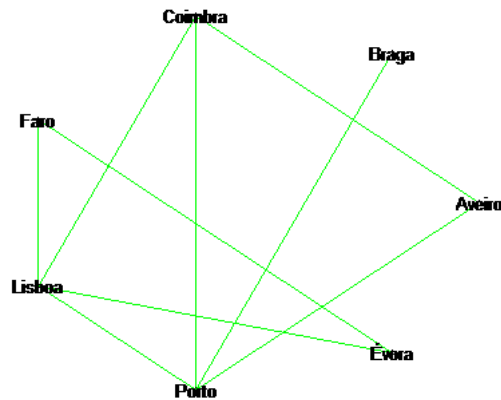
e

$$A(G) = \left\{ \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, g\}, \{e, h\}, \{f, g\}, \{f, h\}, \{f, i\}, \{g, i\}, \{h, i\} \right\}.$$

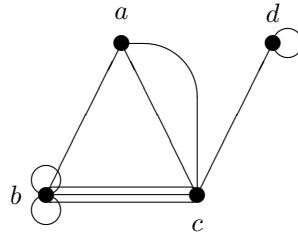
Muitas vezes chamaremos grafo simples ao diagrama que o representa.

É fácil definir e desenhar grafos no Maple com a package `networks`:

```
> with(networks);
> G1 := new();
> addvertex({Coimbra, Lisboa, Porto, Faro, Aveiro, Evora, Braga}, G1);
> addedge({{Coimbra, Lisboa}, {Coimbra, Porto}, {Coimbra, Aveiro}, {Evora, Faro},
           {Lisboa, Porto}, {Porto, Braga}, {Porto, Aveiro}, {Lisboa, Faro}, {Lisboa, Evora}}, G1);
> draw(G1);
```



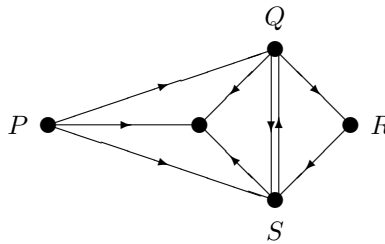
Em qualquer grafo simples, existe no máximo uma aresta unindo cada par de vértices. No entanto, muitos resultados envolvendo grafos simples podem ser estendidos a grafos mais gerais nos quais dois vértices podem ter várias arestas (*arestas múltiplas*) unindo-os. Podemos ainda remover a restrição que impõe que as arestas unam vértices distintos, admitindo *lacetes*, ou seja, arestas unindo um vértice a ele próprio. O grafo daí resultante, no qual lacetes e arestas múltiplas são admitidas, diz-se um *pseudografo*. Por exemplo,



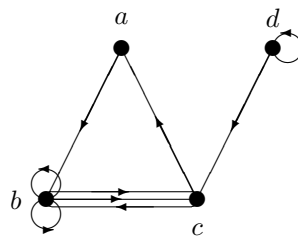
é um pseudografo mas não é um grafo simples.

Embora por vezes tenhamos necessidade de nos restringirmos a grafos simples, provaremos os resultados para pseudografos, sempre que tal seja possível.

Muitas vezes, na modelação de certos problemas convirá considerar um sentido para as arestas. Por exemplo, na modelação de mapas de estradas com sentido único:



Um *grafo dirigido* (ou, abreviadamente, *digrafo*) D consiste num conjunto finito não vazio $V(D)$ de elementos chamados *vértices*, e num conjunto finito $A(D)$ de arestas orientadas (eventualmente múltiplas), chamadas *aros*. Por exemplo:



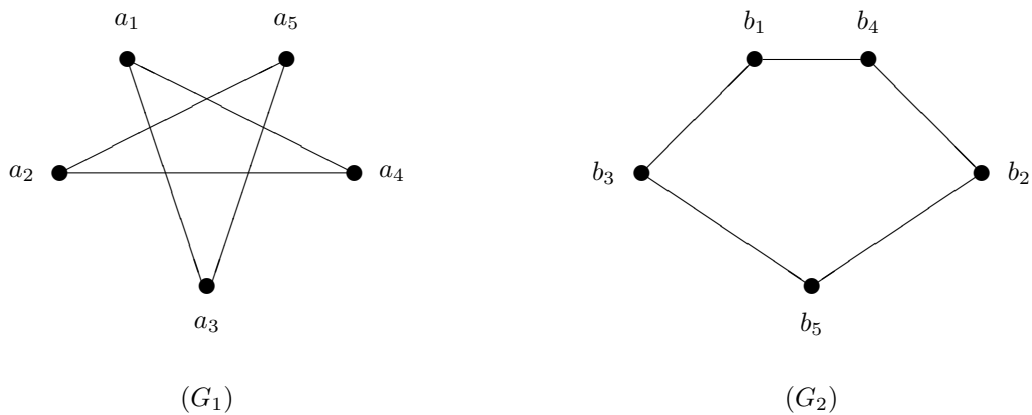
Um digrafo diz-se *simples* se não contiver lacetes e os seus arcos forem todos distintos. Muitas das definições que iremos estudar para pseudografos podem ser imitadas nos digrafos.

A tabela seguinte resume as definições dos vários tipos de grafos:

Tipo	Arestas	Arestas Múltiplas?	Lacetes?
Grafo simples	sem direcção	Não	Não
Multigrafo	sem direcção	Sim	Não
Pseudografo	sem direcção	Sim	Sim
Grafo dirigido	dirigidas	Não	Sim
Multigrafo dirigido	dirigidas	Sim	Sim

Dois grafos G_1 e G_2 dizem-se *isomorfos* se existir uma bijecção $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ preservando a adjacência de vértices, isto é, tal que o número de vezes em que $\{u, v\}$ ocorre em $A(G_1)$ é igual ao número de vezes que $\{f(u), f(v)\}$ ocorre em $A(G_2)$. Neste caso f diz-se um *isomorfismo de grafos*. Escreveremos $G_1 \cong G_2$ para indicar que G_1 e G_2 são isomorfos.

Exemplo. Os grafos



são isomorfos. O isomorfismo é dado por

$$\begin{aligned}
 f : V(G_1) &\rightarrow V(G_2) \\
 a_i &\mapsto b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).
 \end{aligned}$$

Observações. (1) Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

(2) No caso em que G_1 e G_2 são grafos simples, uma bijecção $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ é um isomorfismo se e só se $\{u, v\} \in A(G_1)$ exactamente quando $\{f(u), f(v)\} \in A(G_2)$.

(3) Os grafos simples com menos de 4 vértices são determinados, a menos de isomorfismo, pelo seu número de vértices e de arestas. Sendo p o número de vértices e q o número de arestas, o quadro

	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
$p = 1$				
$p = 2$				
$p = 3$				

dá-nos, a menos de isomorfismo, todos os grafos simples com menos de 4 vértices.

(4) Não podemos afirmar o mesmo no caso do número de vértices ser superior ou igual a 4; neste caso o número de vértices e de arestas não é suficiente para determinar, a menos de isomorfismo, esses grafos. Por exemplo,



não são isomorfos apesar de terem ambos 4 vértices e 2 arestas.

(5) O número de grafos simples com p vértices v_1, v_2, \dots, v_p é igual a $2^{C(p,2)}$ pois é o número de subconjuntos do conjunto de todos os pares não ordenados de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. O número desses grafos que contêm q arestas ($0 \leq q \leq C(p,2)$) é igual a $C(C(p,2), q)$. Por exemplo, para $p = 3$:

$q = 0$			
$q = 1$			
$q = 2$			
$q = 3$			

É claro que os grafos da figura anterior com uma aresta são isomorfos entre si, o mesmo acontecendo com os de duas arestas. A relação de isomorfismo particiona assim o conjunto dos 2^3 grafos simples com vértices v_1, v_2, v_3 , em 4 classes de equivalência, cada uma constituída respectivamente pelos grafos simples com 0 arestas, 1 aresta, 2 arestas e 3 arestas. Representa-se cada uma dessas classes por um (qualquer) dos grafos simples nela contidos, sem designação dos vértices:



Todo o grafo simples com 3 vértices pertence a uma destas 4 classes.

(6) Enumeremos as classes de equivalência dos grafos simples com 4 vértices:

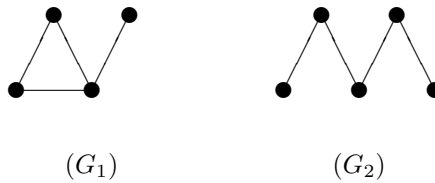
$q = 0$	
$q = 1$	
$q = 2$	
$q = 3$	
$q = 4$	
$q = 5$	
$q = 6$	

O número de grafos simples em cada classe, com vértices v_1, v_2, v_3, v_4 , é dado pela seguinte tabela:

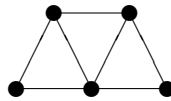
q	n.º de grafos	n.º de grafos	n.º de grafos	Total
0	1			1
1	6			6
2	$4 \times C(3, 2) = 12$	$C(4, 2)/2 = 3$		15
3	12	4	4	20
4	3	12		15
5	6			6
6	1			1

↑
6ª linha do
triângulo de Pascal

Um grafo G_1 é um *subgrafo* de G se $V(G_1) \subseteq V(G)$ e $A(G_1) \subseteq A(G)$. Se, além disso, $V(G_1) = V(G)$, G_1 diz-se um *subgrafo gerador* de G . Por exemplo, os grafos

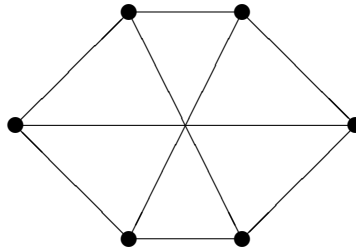


são ambos subgrafos de



sendo G_2 gerador e G_1 não.

No entanto G_1 não é subgrafo de



embora G_2 o seja.

Podemos combinar dois grafos de modo a obter um grafo maior. Se G_1 e G_2 são dois grafos tais que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, podemos definir a sua *união* $G_1 \cup G_2$ como sendo o grafo G tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $A(G) = A(G_1) \cup A(G_2)$.

Um grafo é *conexo* se não puder ser expresso como união de dois grafos, e *desconexo* caso contrário. Evidentemente qualquer grafo desconexo G pode ser expresso como união de grafos conexos, cada um destes dizendo-se uma *componente* de G . Por exemplo,

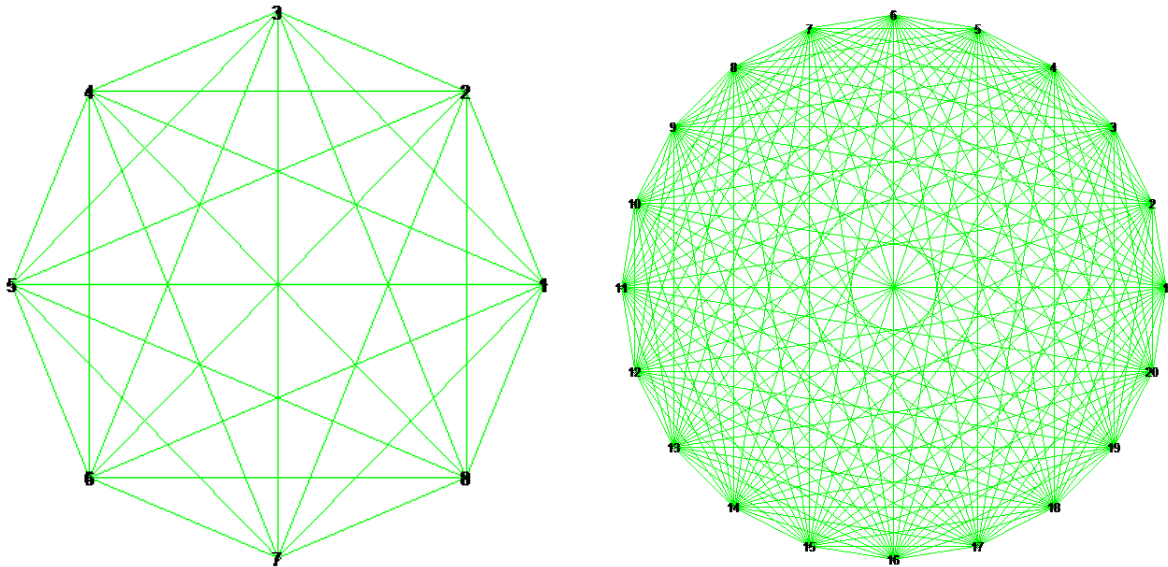


é um grafo desconexo com três componentes.

Se $a = \{v_1, v_2\}$ for uma aresta de um grafo, dizemos que a é *incidente* em v_1 e em v_2 . Designamos por *grau* de um vértice v o número de arestas incidentes em v . Denotaremos esse número por $g(v)$.

Um grafo simples com p vértices no qual todos tenham o mesmo grau $p - 1$ diz-se um *grafo completo* e denota-se por K_p .

> `draw(complete(8)); draw(complete(20));`



Um grafo diz-se *regular* se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. Se esse grau for r diz-se que o grafo é regular de grau r .

Um vértice de grau 0 diz-se *isolado* e um de grau 1 chama-se *terminal*.

Proposição 1. [Euler (1736)] *Em qualquer grafo a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas, sendo portanto um número par.*

Prova. É óbvio, pois cada aresta é incidente em dois vértices. □

Este resultado é habitualmente apelidado de *Lema dos apertos de mão*, pelo facto de implicar que se um grupo de pessoas apertar as mãos entre si, o número total de mãos apertadas será par — precisamente porque exactamente duas mãos estão envolvidas em cada aperto de mão.

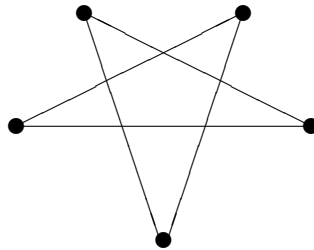
Esta proposição implica imediatamente o seguinte:

Corolário 1. *Em qualquer grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.* □

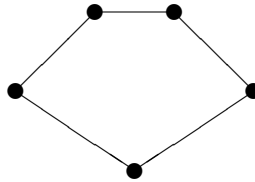
Corolário 2. *Seja G um grafo regular tal que todo o vértice tem grau 3. Então $|V(G)|$ é par.*

Prova. Designemos os vértices de G por v_1, v_2, \dots, v_p . Como $g(v_i) = 3$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $\sum_{i=1}^p g(v_i) = 3p$. Mas, pela Proposição 1, $\sum_{i=1}^p g(v_i) = 2q$, sendo q o número de arestas de G . Logo $3p = 2q$ e, conseqüentemente, p é par. □

Seja G um grafo simples. O grafo complementar de G , que denotaremos por \overline{G} , é definido por $V(\overline{G}) = V(G)$ e $\{u, v\} \in A(\overline{G})$ se e só se $\{u, v\} \notin A(G)$. Por exemplo,



é o complementar de



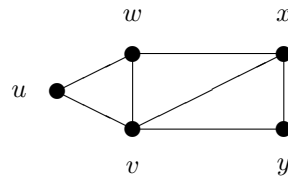
Teorema 2. *Para qualquer grafo simples G com 6 vértices, G ou \overline{G} admitem K_3 como subgrafo (ou seja, G ou \overline{G} contêm um triângulo).*

Prova. Seja v um vértice de G . A soma dos graus de v nos grafos G e \overline{G} é 5. Portanto, num dos grafos G ou \overline{G} , v está unido com, pelo menos, outros 3 vértices. Suponhamos, sem perda de generalidade, que isto se passa em G , isto é, que há 3 vértices em G unidos a v por uma aresta. Se dois destes vértices forem adjacentes em G então eles formam com v um triângulo. Se, pelo contrário, não houver arestas em G entre quaisquer dois destes 3 vértices então eles são adjacentes em \overline{G} e formam, pois, um triângulo em \overline{G} . □

Utilizando este teorema podemos provar que se 6 pessoas participam numa festa, então 3 delas conhecem-se mutuamente ou desconhecem-se mutuamente (basta traduzir esta situação por um grafo com 6 vértices, representando as 6 pessoas, fazendo dois vértices adjacentes se as pessoas que representam se conhecem).

Embora seja muito conveniente representar um grafo por um diagrama de pontos ligados por arestas, tal representação pode ser inconveniente se a pretendermos armazenar em computador.

Um modo alternativo de representar um grafo simples é por listagem dos vértices adjacentes a cada vértice do grafo. Por exemplo, o grafo



pode ser representado por

$$\begin{aligned} u &: v, w \\ v &: u, w, y \\ w &: v, x, u \\ x &: w, y, v \\ y &: v, x \end{aligned}$$

Contudo as representações mais úteis são as que usam matrizes. Seja G um grafo com vértices v_1, v_2, \dots, v_n . A *matriz de adjacência* de G é a matriz $A = [\alpha_{ij}]$, de ordem $n \times n$, onde α_{ij} é o número de arestas que ligam o vértice v_i ao vértice v_j . Se G tiver arestas a_1, a_2, \dots, a_m , a *matriz de incidência* de G é a matriz $B = [\beta_{ij}]$, de ordem $n \times m$, onde $\beta_{ij} = 1$ caso a_j seja incidente em v_i e $\beta_{ij} = 0$ caso contrário.

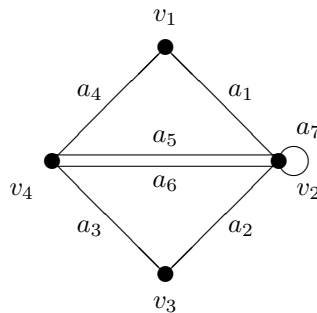
Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são as matrizes de adjacência e de incidência do grafo



Observações. (1) Toda a matriz de adjacência é simétrica. Se o grafo não possuir lacetes então os elementos da diagonal principal são nulos. No caso do grafo não possuir arestas múltiplas as entradas da matriz só podem tomar os valores 0 e 1. As matrizes de adjacência representam de forma completa os grafos, na medida em que é possível recuperar toda a informação sobre um grafo a partir da sua matriz de adjacência. Toda a matriz de números inteiros positivos, simétrica, determina, a menos de um isomorfismo, um grafo.

(2) Se na matriz de adjacência de um grafo G fizermos uma troca de colunas acompanhada da respectiva troca de linhas, isso equivale, no grafo G , a renumerar os seus vértices.

(3) Uma matriz de incidência de um grafo sem lacetes tem em cada coluna exactamente dois elementos não nulos. No caso de haver lacetes, a respectiva coluna possui só um elemento não nulo.

(4) Toda a matriz de elementos no conjunto $\{0, 1\}$, tal que em cada coluna há entre um e dois elementos não nulos, determina, a menos de isomorfismo, um grafo.

Num grafo G , chama-se *caminho* a uma sequência

$$v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{m-1}, a_m, v_m$$

com $v_i \in V(G)$ ($i \in \{0, 1, \dots, m\}$) e $a_j = \{v_{j-1}, v_j\} \in A(G)$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$). O caminho diz-se *fechado* caso $v_0 = v_m$. Se $v_0 \neq v_m$ diz-se *aberto*. Se todas as arestas são distintas, diz-se um *caminho sem repetição de arestas*. Se todos os vértices forem distintos (com excepção do primeiro e do último no caso de caminhos fechados), diz-se um *caminho sem repetição de vértices*.

Note-se que um grafo é conexo se e só se todo o par de vértices estiver ligado por um caminho sem repetição de vértices. Um subgrafo S de G é uma componente de G se for conexo e se não existir um subgrafo S_1 de G que seja conexo e tal que $S_1 \neq S$ e S é subgrafo de S_1 (isto é, S é um subgrafo conexo *maximal* de G).

Por vezes denotaremos abreviadamente o caminho

$$v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{m-1}, a_m, v_m$$

por $v_0 v_1 v_2 \dots v_m$. O seu *comprimento* é o número m de arestas que possui. Um caminho com um só vértice tem comprimento zero.

Um caminho fechado sem repetição de vértices, de comprimento $m \geq 1$, é chamado *ciclo*. Qualquer lacete ou par de arestas múltiplas é um ciclo.

Proposição. *Seja G um grafo com vértices v_1, v_2, \dots, v_n e matriz de adjacência A . O elemento na linha i e coluna j de A^m ($m \in \mathbb{N}$) é o número de caminhos de comprimento m unindo v_i e v_j .*

Prova. Basta reparar que esse elemento é igual a

$$\sum_{k_{m-1}=1}^n \sum_{k_{m-2}=1}^n \cdots \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_1=1}^n a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{m-2} k_{m-1}} a_{k_{m-1} j}.$$

□

Em particular, para $i \neq j$, o elemento (i, j) de A^2 é igual ao número de caminhos, sem repetição de arestas, de comprimento 2, unindo v_i e v_j .

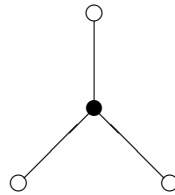
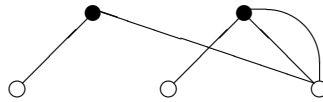
Se G não contiver arestas múltiplas, o elemento (i, i) de A^2 é igual ao grau de v_i . De facto, neste caso, este elemento é dado por

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

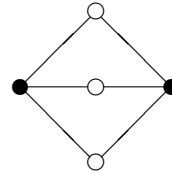
(pois, não havendo arestas múltiplas, $a_{ij} \in \{0, 1\}$) e $\sum_{j=1}^n a_{ij} = g(v_i)$.

Um *grafo bipartido* G é um grafo cujo conjunto de vértices admite uma partição em dois subconjuntos não vazios, V_1 e V_2 , de tal modo que toda a aresta de G é incidente num elemento de V_1 e noutro de V_2 . Se todo o vértice de V_1 estiver ligado por uma (e uma só) aresta a cada vértice de V_2 , G diz-se um *grafo bipartido completo*. Neste caso, se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, G denota-se por $K_{m,n}$. Se $|V_1| = 1$, G diz-se uma *estrela*.

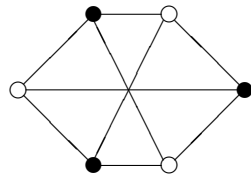
Apresentemos alguns exemplos de grafos bipartidos:



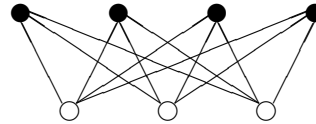
$K_{1,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



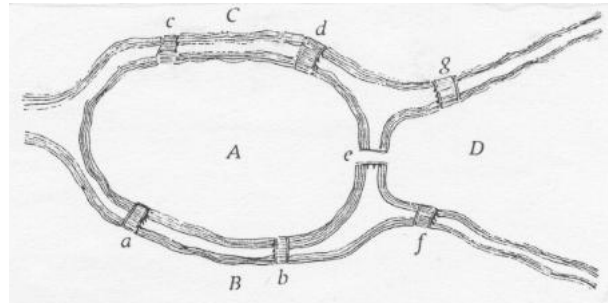
$K_{4,3}$

Proposição. *Se G é um grafo bipartido, cada ciclo de G tem comprimento par.*

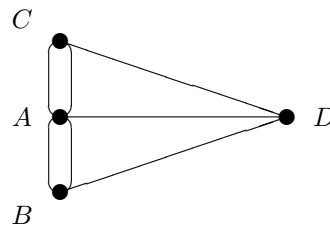
Prova. Seja $V(G) = V_1 \cup V_2$ uma partição de $V(G)$ em dois subconjuntos não vazios, tais que toda a aresta de G une um elemento de V_1 com um de V_2 . Consideremos um ciclo $v_1v_2 \dots v_mv_1$ e suponhamos (sem perda de generalidade) que $v_1 \in V_1$. Então todos os vértices de índice ímpar do ciclo estão em V_1 e os de índice par pertencem a V_2 . Como v_m tem que estar em V_2 , m é par. \square

Grafos eulerianos

Recordemos o problema das pontes de Königsberg onde se pergunta se será possível atravessar cada uma das 7 pontes na figura



exactamente uma vez e voltar ao ponto de partida. Isto é equivalente a perguntar se no grafo



existe um caminho fechado, sem repetição de arestas, contendo todas as arestas.

Um grafo diz-se *euleriano* se admite um caminho fechado sem repetição de arestas, contendo todas as arestas. Designa-se esse caminho por *caminho euleriano*.

Portanto a questão que se põe é a de saber se o grafo acima é euleriano. Problemas sobre grafos eulerianos aparecem frequentemente em passatempos recreativos (um problema típico é o de saber se determinada figura geométrica pode ser desenhada sem levantar a ponta do lápis e sem passar por nenhuma linha mais do que uma vez).

Lema. Se G é um grafo no qual o grau de qualquer vértice é pelo menos 2, G contém um ciclo.

Prova. Se G possui lacetes ou arestas múltiplas, o resultado é óbvio. Podemos pois assumir que G é simples. Seja v um vértice de G e construamos um caminho $v v_1 v_2 \dots$, escolhendo v_1 entre os vértices adjacentes a v e, para cada $i > 1$, escolhendo v_{i+1} entre os vértices adjacentes a v_i que não sejam a v_{i-1} (a existência de tal vértice é garantida pela hipótese). Como G contém

somente um número finito de vértices, teremos que a dada altura ter como única hipótese a escolha de um vértice que já o tinha sido anteriormente. Se v_k for o primeiro destes vértices então a parte do caminho entre as duas ocorrências de v_k é o ciclo requerido. \square

Todo o grafo euleriano é obviamente conexo. O seguinte teorema, demonstrado por Euler em 1736, permitindo a resolução imediata do problema das pontes de Königsberg, caracteriza os grafos conexos que são eulerianos.

Teorema. [Euler (1736)] *Um grafo conexo G é euleriano se e só se o grau de qualquer vértice de G for par.*

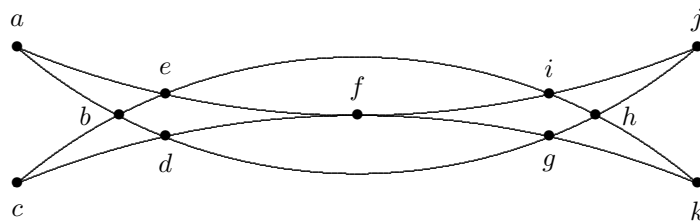
Prova. Seja E um caminho euleriano em G . Cada vez que um vértice aparece em E tem duas arestas incidentes. Como cada aresta ocorre precisamente uma vez em E , o grau de cada vértice é par.

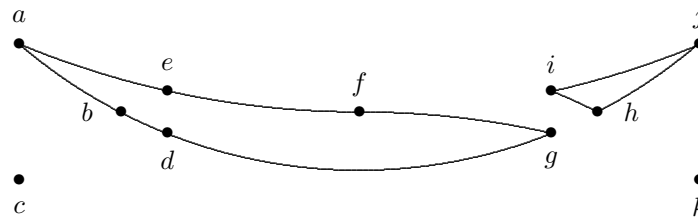
Provaremos a recíproca por indução sobre o número de arestas de G . Suponhamos então que o grau de cada vértice de G é par. O caso em que G não possui arestas é trivial. Portanto, como hipótese de indução, admitiremos que o resultado é válido se G possuir menos de n arestas e nessas condições provaremos que o resultado é válido no caso de G possuir n arestas ($n \geq 1$).

Como G é conexo, cada vértice terá pelo menos grau 2 e, portanto, pelo Lema, G contém um ciclo C . Se C contiver todas as arestas de G , a prova está terminada. Senão, removamos de G todas as arestas de C , formando um novo grafo H , eventualmente desconexo, com menos arestas que G e no qual todo o vértice continua a ter grau par. Pela hipótese de indução, cada componente de H possui um caminho euleriano. Como cada componente de H possui pelo menos um vértice em comum com C (pela conexidade de G) obtemos o caminho euleriano de G seguindo as arestas de C até um vértice não isolado de H ser alcançado, traçando o caminho euleriano da componente de H que contém tal vértice e, de seguida, continuando pelas arestas de C até encontrar um vértice não isolado pertencendo a outra componente de H , traçando o caminho euleriano desta, e assim sucessivamente. O processo terminará quando voltarmos ao vértice inicial. \square

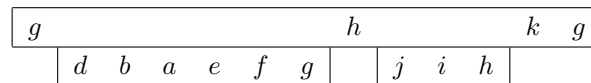
É importante notar que a demonstração do Teorema de Euler nos dá um algoritmo para construirmos um caminho euleriano num grafo euleriano. O seguinte exemplo mostra-nos como pode ser utilizada para resolver os tais passatempos com lápis e papel referidos anteriormente.

Exemplo. *Será que se consegue desenhar a cimitarra de Mohammed sem levantar a ponta do lápis do papel e sem passar por nenhum traço mais do que uma vez?*





cujas duas componentes têm caminhos eulerianos $aefgdba$ e jih . Portanto



é um caminho euleriano de H e, conseqüentemente,

$$ihkgdbaefghjifdcbei$$

é um caminho euleriano de G .

A prova do Teorema de Euler pode ser ligeiramente modificada de modo a obtermos o seguinte resultado:

Corolário. *Um grafo conexo é euleriano se e só se o conjunto das suas arestas pode ser particionado em ciclos.*

Prova. Seja G um grafo euleriano. O caso em que G não possui arestas é trivial. Sendo G conexo e tendo pelo menos uma aresta, todo o seu vértice tem, pelo menos, grau 2. Portanto, pelo Teorema de Euler, possui um ciclo C_1 . Retirando a G as arestas de C_1 obtemos um subgrafo gerador G_1 cujos vértices têm ainda todos grau par. Se G_1 não tem arestas, está terminada a demonstração desta implicação. Caso contrário, G_1 tem um ciclo C_2 e a repetição do argumento anterior conduz-nos a um grafo G_2 , subgrafo gerador de G_1 , cujos vértices têm grau par. Se G_2 não tem arestas terminamos, caso contrário repete-se o argumento. E continuamos com este raciocínio sucessivamente até obtermos um grafo G_n totalmente desconexo (isto é, sem arestas). Aí teremos uma partição das arestas de G em n ciclos.

Reciprocamente, suponhamos que o conjunto das arestas de G admite uma partição em ciclos. Seja C_1 um desses ciclos. Se G se reduz a este ciclo então, evidentemente, G é euleriano. Senão existe outro ciclo C_2 da partição, com um vértice comum a C_1 . Sejam

$$C_1 \equiv v_0 v_1 \dots v_n,$$

com $v_0 = v_n = v$, e

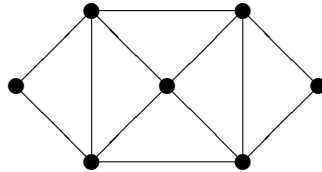
$$C_2 \equiv w_0 w_1 \dots w_m$$

com $w_0 = w_m = v$. Então $v_0 v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m$ é um caminho sem repetição de arestas, fechado, contendo todos os vértices e arestas de C_1 e C_2 . Se G se reduzir aos ciclos C_1 e C_2 a

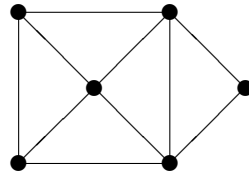
demonstração está terminada. Não sendo esse o caso, bastará continuarmos com um raciocínio análogo, agora para três ciclos C_1 , C_2 e C_3 .

Continuando este processo podemos construir um caminho fechado sem repetição de arestas, contendo todas as arestas e vértices de G . \square

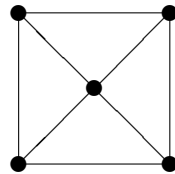
Por vezes, a questão que se põe é a da averiguação da existência de um *caminho semi-euleriano*, isto é, um caminho aberto sem repetição de arestas, contendo todas as arestas. Os grafos onde tal caminho exista chamam-se *grafos semi-eulerianos*. Por exemplo,



é euleriano, mas não é semi-euleriano, enquanto que



é semi-euleriano, mas não é euleriano, e



não é uma coisa nem outra.

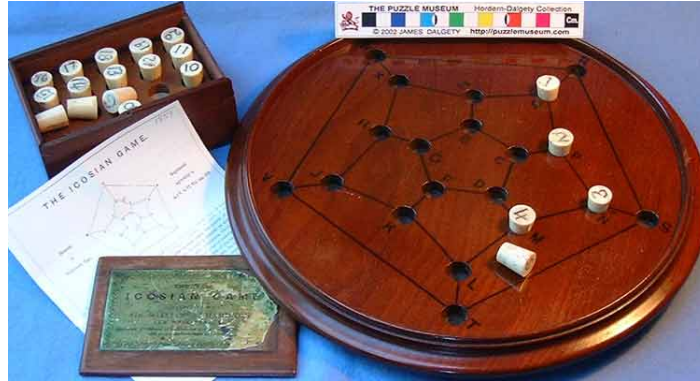
Corolário. *Um grafo conexo é semi-euleriano se e só se possuir exactamente dois vértices de grau ímpar. Neste caso o caminho semi-euleriano inicia-se num desses vértices e termina no outro.*

Prova. Suponhamos que G possui um caminho semi-euleriano E começando num vértice v e terminando num vértice w . Como $v \neq w$ é claro que v e w têm ambos grau ímpar. Cada vez que um dos outros vértices aparece em E tem 2 arestas incidentes. Como cada aresta ocorre precisamente uma vez em E , o grau desses vértices é par.

Reciprocamente, suponhamos que G é conexo e possui exactamente 2 vértices, v e w , de grau ímpar. Consideremos o grafo G^* que se obtem de G por junção de uma nova aresta ligando v a w . A este novo grafo podemos aplicar o Teorema de Euler e concluir que admite um caminho euleriano. Apagando deste caminho a aresta previamente adicionada a G obtemos um caminho semi-euleriano ligando v e w , como desejávamos. \square

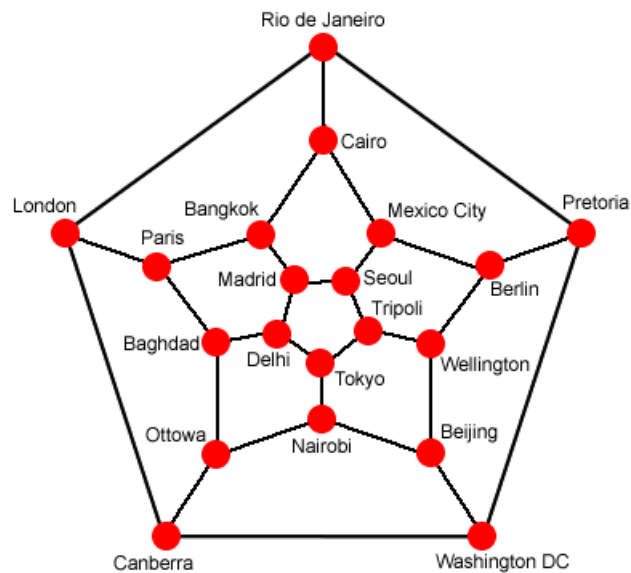
Grafos hamiltonianos

Em 1857, o matemático irlandês W. R. Hamilton inventou um *puzzle*¹⁰ cujo objectivo é o de determinar um certo caminho através das arestas de um dodecaedro.



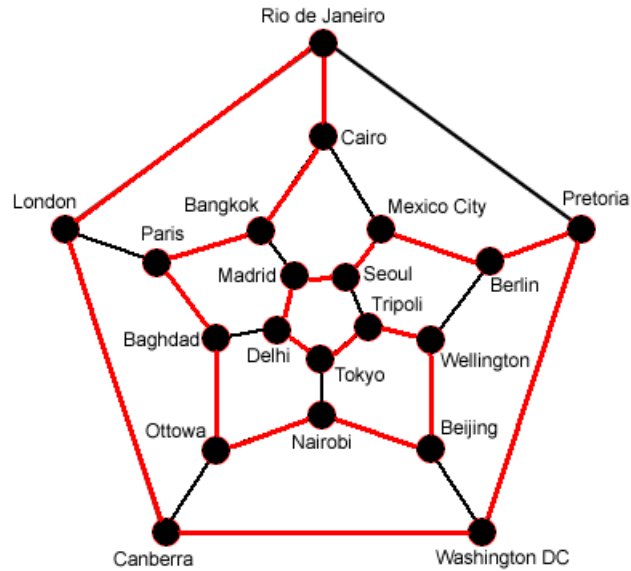
Os vértices do dodecaedro representam 20 cidades importantes: Bruxelas, Cantão, Deli, etc., acabando em Zanzibar. Cada vértice é marcado por um grampo, e um pedaço de fio é usado para ligar os grampos uns aos outros, para indicar um caminho. Um circuito completo, passando por cada cidade uma única vez era chamado “uma viagem à volta do mundo”.

Os vértices e as arestas do dodecaedro podem ser representados no plano pelo seguinte grafo:



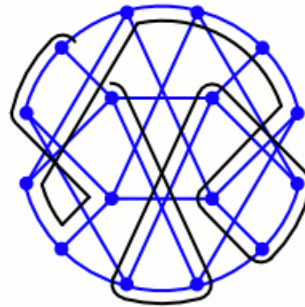
No grafo seguinte, as arestas a vermelho determinam um caminho fechado que, começando num vértice arbitrário, permite-nos voltar a ele depois de visitarmos cada um dos outros vértices uma vez. Este caminho mostra como o *puzzle* de Hamilton tem resposta afirmativa.

¹⁰Conhecido por “Viagem à volta do mundo” ou “Dodecaedro do viajante”.

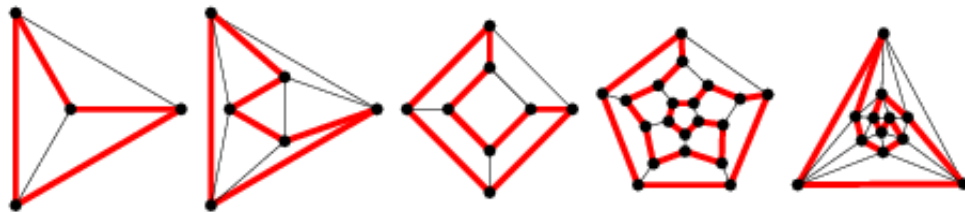


Na terminologia moderna dos grafos, um circuito destes é chamado um *caminho hamiltoniano*. Esta noção de caminho hamiltoniano é relevante para um problema de grande importância prática, chamado “problema do caixeiro-viajante”, que abordaremos mais adiante.

O *puzzle* de Hamilton pode evidentemente ser formulado para qualquer outro grafo: um grafo diz-se *hamiltoniano* se admite um caminho hamiltoniano. Por exemplo, no seguinte grafo (a azul) está traçado um caminho hamiltoniano que mostra que o grafo é hamiltoniano.



Mais exemplos:



Se o número de vértices de um grafo hamiltoniano G for n , então qualquer caminho hamiltoniano em G tem comprimento n .

Apesar da semelhança entre caminhos hamiltonianos e caminhos eulerianos não se conhecem condições necessárias e suficientes para que um grafo seja hamiltoniano. A procura de tais caracterizações é um dos mais importantes problemas da Teoria dos Grafos, ainda por resolver. Com efeito, muito pouco é conhecido sobre grafos hamiltonianos. Os únicos resultados conhecidos são do tipo “se G possui arestas suficientes então G é hamiltoniano”. Provavelmente o mais importante destes resultados é devido a G. A. Dirac e conhecido como Teorema de Dirac. Vamos deduzi-lo a partir do seguinte resultado de O. Ore:

Teorema de Ore (1960). *Seja $n \geq 3$. Se G é um grafo simples com n vértices e $g(v) + g(w) \geq n$ para cada par de vértices não adjacentes v e w , então G é hamiltoniano.*

Prova. Observemos antes de mais que G é conexo. Se não fosse, teria pelo menos duas componentes. Suponhamos que uma tinha n_1 vértices e a outra n_2 , onde $n_1 + n_2 \geq n$. Sendo v um vértice da primeira componente e w um vértice da outra, v e w não estariam ligados por nenhuma aresta. Além disso, $g(v) \geq n_1 - 1$ e $g(w) \geq n_2 - 1$, pelo que $g(v) + g(w) \geq n_1 + n_2 - 2 \geq n - 2$, o que contradiz a hipótese. Portanto G é conexo.

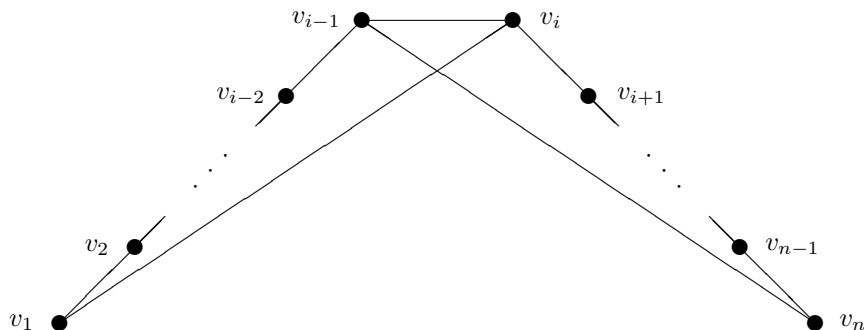
Seja agora $C = v_1 v_2 \dots v_r$ um caminho sem repetição de vértices com o maior comprimento possível.

CASO 1: $r = n$ Se v_1 e v_n estiverem ligados por uma aresta então $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ é um caminho hamiltoniano.

Se v_1 e v_n não estiverem ligados por uma aresta, seja $p \geq 1$ o número de vértices à qual v_1 está ligado e $q \geq 1$ o número de vértices à qual v_n está ligado. Por hipótese $p + q \geq n$. Se existir um vértice v_i , entre os vértices v_2, \dots, v_n , à qual v_1 esteja ligado e tal que v_n está ligado a v_{i-1} então

$$v_1 v_i v_{i+1} \dots v_n v_{i-1} v_{i-2} \dots v_2 v_1$$

é um caminho hamiltoniano:



Mostremos que tal vértice terá que existir, o que completará a prova deste caso. Se v_n não estivesse unido a nenhum dos vértices de C imediatamente precedentes a um dos p vértices à qual v_1 está ligado, então os q vértices à qual v_n está ligado fariam parte de um conjunto de $(n - 1) - p$ vértices. Consequentemente $(n - 1) - p \geq q$, ou seja, $n - 1 \geq p + q$, o que contradiz o facto $p + q \geq n$.

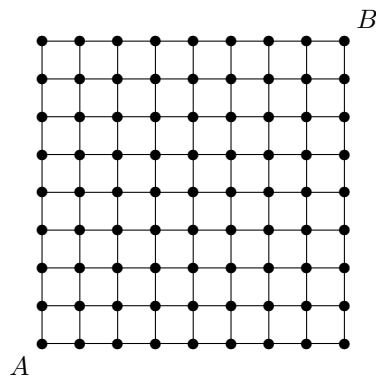
CASO 2: $r < n$ Suponhamos que v_1 está ligado a um vértice v que não é um vértice de C . Então $v v_1 v_2 \dots v_r$ seria um caminho sem repetição de arestas, de comprimento maior do que C . Portanto v_1 está ligado somente a vértices de C . Analogamente, poderemos concluir que v_r está também ligado somente a vértices de C . Podemos então repetir um raciocínio análogo ao realizado no caso 1 e concluir que existe um ciclo C' de comprimento r , $v_1 v_2 \dots v_r v_1$ ou

$$v_1 v_i v_{i+1} \dots v_r v_{i-1} v_{i-2} \dots v_1,$$

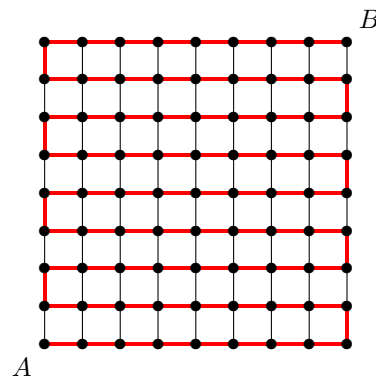
conforme o caso. Representemo-lo por $w_1 w_2 \dots w_r w_1$. Como G é conexo, existe um vértice v que não está em C' mas que está unido a algum vértice w_j . Então $v w_j \dots w_r w_1 \dots w_{j-1}$ é um caminho sem repetição de vértices de comprimento $r + 1$, o que não pode existir, da maneira como tomámos C . Em conclusão, o caso 2 nunca pode acontecer. \square

Corolário. [Dirac (1952)] *Seja $n \geq 3$. Se G é um grafo simples com n vértices e $g(v) > \frac{n}{2}$ para qualquer vértice v , então G é hamiltoniano.* \square

Para terminar recordemos o Problema (A5) da Introdução. Representando cada cela por um vértice e cada porta por uma aresta obtemos o grafo



O problema resume-se à existência ou não de um caminho unindo A e B , passando exactamente uma vez por cada vértice, ou seja, um caminho *semi-hamiltoniano* entre A e B . Não é difícil encontrar uma solução:



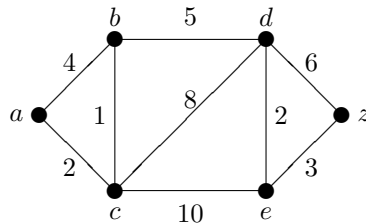
Alguns problemas práticos importantes

Os avanços mais importantes da Teoria dos Grafos têm sido motivados, quase sempre, pela tentativa de resolução de problemas práticos muito específicos — Euler e o problema das pontes de Königsberg, Cayley e a enumeração de compostos químicos, Kirchoff e problemas de redes eléctricas, etc.

Abordemos sucintamente alguns desses problemas com importância na vida real.

O problema do caminho mais curto. Consideremos o seguinte problema:

Qual é o caminho mais curto de a para z no grafo seguinte?



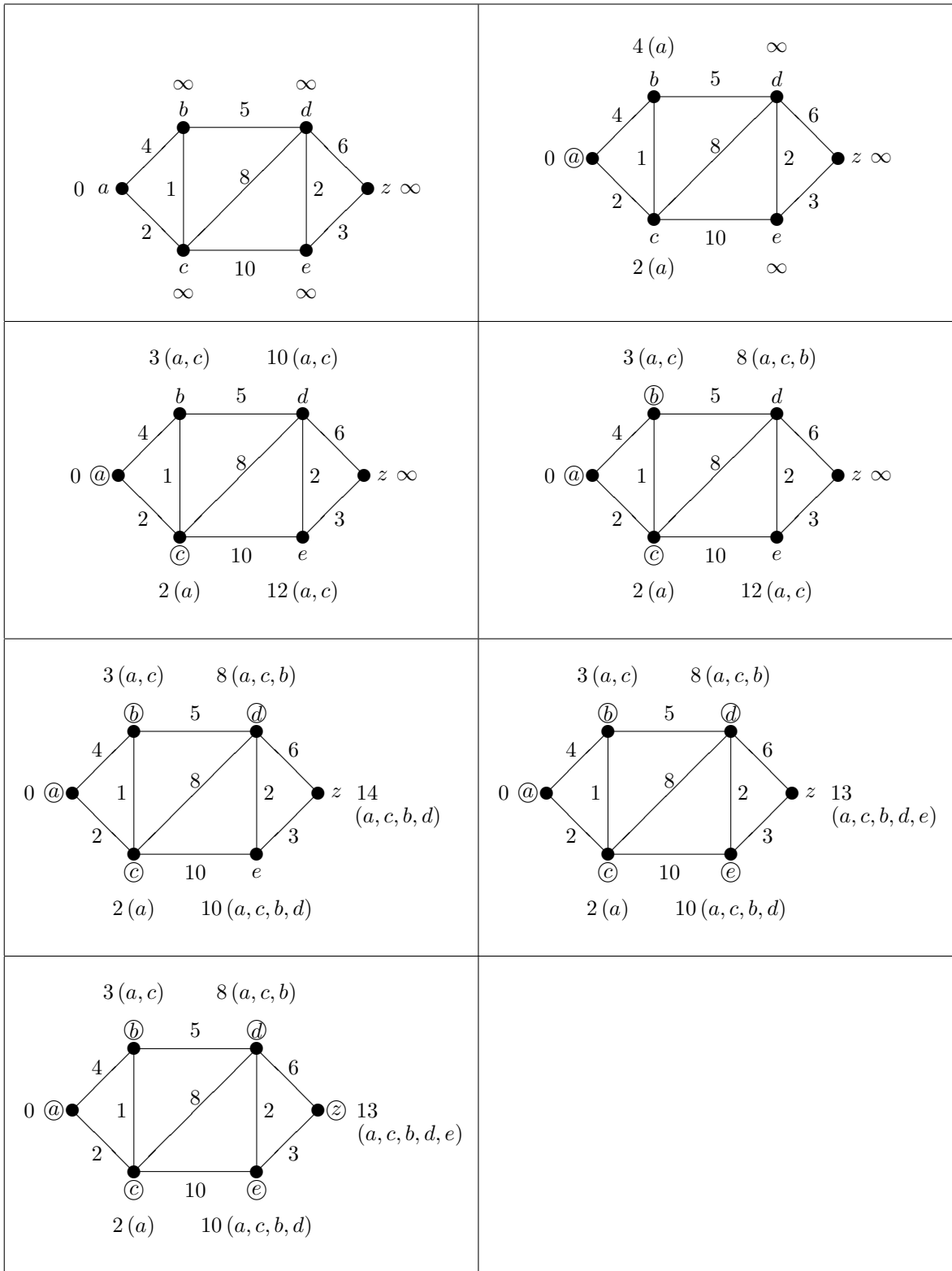
Notemos que noutros problemas, os números no grafo poderão representar, não os comprimentos das estradas, mas sim os tempos gastos a percorrê-las ou os custos de as percorrer. Portanto, possuindo um algoritmo para resolver o problema do caminho mais curto, este algoritmo pode também ser utilizado para determinar o caminho mais rápido, o mais económico, etc.

Nestes problemas o nosso mapa pode ser visto como um grafo conexo no qual um número não negativo é atribuído a cada aresta. Tais grafos chamam-se *grafos com pesos* e o número atribuído a cada aresta a chama-se o *peso* de a .

Existe um algoritmo eficiente, isto é, um procedimento com um número finito de passos que rapidamente nos conduz à solução. A ideia deste algoritmo consiste em movermo-nos ao longo do grafo, da esquerda para a direita, associando a cada vértice v um número $L(v)$ indicando a distância mínima entre a e v . Isto significa que, quando chegarmos por exemplo ao vértice d , $L(d)$ seja o menor dos números $L(b) + 5$ ou $L(c) + 8$.

Para aplicar o algoritmo começamos por definir $L(a) = 0$ e damos a b, c, d, e as etiquetas temporárias $L(b) = L(c) = L(d) = L(e) = \infty$. Em seguida consideramos os vértices adjacentes a a . O vértice b fica com a etiqueta temporária $L(a) + 4 = 4$ e o vértice c com $L(a) + 2 = 2$. Consideramos a menor destas, que será a etiqueta definitiva de c : $L(c) = 2$. Em seguida consideramos os vértices adjacentes a c . O vértice e fica etiquetado com $L(c) + 10 = 12$, o vértice d com $L(c) + 8 = 10$ e podemos descer a etiqueta de b para $L(c) + 1 = 3$. A menor destas etiquetas é agora 3 (em b). Será esta a etiqueta permanente de b . Agora consideramos os vértices adjacentes a b . O vértice d desce a sua etiqueta temporária para $L(b) + 5 = 8$. A menor das etiquetas temporárias é agora 8 (em d). Escreveremos então $L(d) = 8$. Continuando deste modo, obtemos sucessivamente as etiquetas permanentes $L(e) = 10$ e $L(z) = 13$. Portanto o caminho mais curto entre a e z mede 13, que é o caminho $ac b d e$.

Resumindo:



Este algoritmo deve-se a Dijkstra (1959) e a sua formulação geral diz o seguinte:

Seja $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Denotemos por $c(v_i, v_j)$ o comprimento da aresta entre v_i e v_j . O algoritmo começa por etiquetar v_1 com um zero e os outros vértices com ∞ . Usamos a notação $L_0(v_1) = 0$ e $L_0(v) = \infty$ para estas etiquetas. Estes são os comprimentos dos caminhos mais curtos de v_1 aos diferentes vértices que contêm somente o vértice v_1 (∞ indica simplesmente que não existe nenhum caminho nessas condições).

O algoritmo prossegue formando uma família de vértices específica. Seja S_k tal família após k iterações. Começamos com $S_0 = \emptyset$. O conjunto S_k forma-se a partir de S_{k-1} acrescentando-lhe o vértice w com menor etiqueta entre os que não estão em S_{k-1} . Uma vez acrescentado este vértice a S_{k-1} , atualizam-se as etiquetas dos vértices que não pertencem a S_k de modo a que essa etiqueta $L_k(v)$ (a etiqueta do vértice v no k -ésimo passo) seja o comprimento do caminho mais curto de v_1 a v que contem somente vértices de S_k . Notemos que

$$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(v), L_{k-1}(w) + c(w, v)\}.$$

Algoritmo de Dijkstra (1959). Determinação do caminho mais curto do vértice v_1 aos outros vértices do grafo, onde os comprimentos das arestas são positivos:

1. Faça

$$c(v_i, v_j) = \begin{cases} \text{Comprimento da aresta } v_i v_j & \text{ caso ela exista} \\ \infty & \text{ caso contrário} \end{cases}$$

2. Faça $L(v_1) := 0, L(v_2) := \infty, \dots, L(v_n) := \infty, S := \emptyset$.

3. Enquanto $v_n \notin S$ faça

(a) $w :=$ vértice em $V(G) \setminus S$ com etiqueta $L(w)$ mínima;

(b) $S := S \cup \{w\}$;

(c) Para todos os vértices em $V(G) \setminus S$, se $L(w) + c(w, v) < L(v)$ faça $L(v) := L(w) + c(w, v)$.

4. O comprimento do caminho mais curto de v_1 a v_n é então $L(v_n)$.

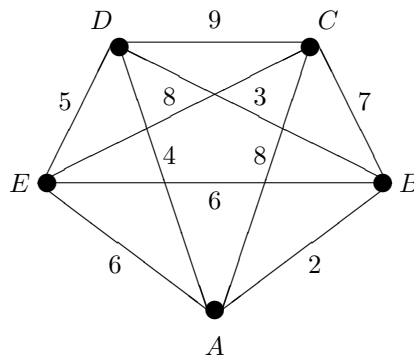
Existem muitas variantes deste algoritmo para aplicação, por exemplo, aos digrafos, à determinação do caminho mais longo, etc.

O problema do carteiro chinês. Neste problema, originalmente estudado pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan, em 1962, um carteiro tem que distribuir cartas pelas casas de um bairro, voltando depois ao ponto de partida na estação dos correios. Qual é a menor distância que terá o carteiro de percorrer? Evidentemente terá de percorrer cada rua pelo menos uma vez, mas deverá evitar percorrê-las mais do que uma vez.

Este problema pode ser formulado em termos de grafos com pesos, onde o grafo corresponde à rede de ruas e o peso de cada aresta é o comprimento da respectiva rua. Se o grafo tiver um caminho euleriano, o carteiro pode iniciar esse caminho na estação dos correios, percorrê-lo e voltar aos correios. Nenhum outro trajecto tem comprimento menor. Tal caminho euleriano

pode ser obtido, como vimos, pelo algoritmo do Teorema de Euler. Se o grafo não for euleriano, o problema é muito mais complicado, embora se conheça um algoritmo eficiente para o resolver, que não apresentaremos aqui. A ideia é acrescentar a G cópias de algumas das suas arestas de modo a obter um multi-grafo que tenha um caminho euleriano. Assim, o problema de determinar o trajecto óptimo para o carteiro é equivalente à determinação do menor número de cópias de arestas de G a juntar a G de maneira a obter um multigrafo com um caminho euleriano.

O problema do caixeiro-viajante. Neste problema, como já referimos, um caixeiro-viajante pretende visitar várias cidades e voltar ao ponto de partida, percorrendo a menor distância possível. Por exemplo, se existirem 5 cidades A, B, C, D e E e as distâncias forem como em



o trajecto mais curto é $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$ e mede 26.

Este problema pode, como estamos a ver, ser formulado em termos de grafos com pesos. Neste caso o que se pretende é encontrar um caminho hamiltoniano de menor peso possível.

Um método possível consiste em calcular a distância total de todos os caminhos hamiltonianos, mas isto torna-se muito pouco prático. Com efeito, qualquer trajecto começando e terminando na cidade C_1 corresponde a uma permutação das $n - 1$ cidades restantes C_2, \dots, C_n . Existem assim $(n - 1)!$ trajectos diferentes. Como, para qualquer permutação $i_2 i_3 \dots i_n$ dos números $2, 3, \dots, n$, o trajecto

$$C_1 C_{i_2} C_{i_3} \dots C_{i_n} C_1$$

tem o mesmo comprimento que

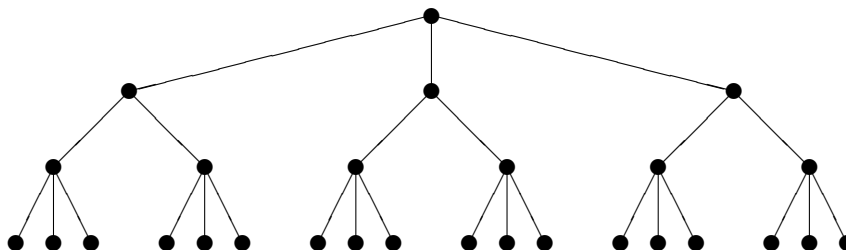
$$C_1 C_{i_n} C_{i_{n-1}} \dots C_{i_2} C_1,$$

será suficiente considerar $\frac{(n-1)!}{2}$ trajectos. Mas, mesmo assim, este número pode ser muito elevado o que torna este método impraticável para mais do que 5 cidades. Por exemplo, no caso de 20 cidades, o número de caminhos hamiltonianos a avaliar é $19!/2 \approx 6 \times 10^{16}$. Outros algoritmos têm sido propostos mas levam muito tempo a executar. Na verdade, não se conhece nenhum algoritmo suficientemente geral e eficiente para determinar o trajecto mais económico¹¹.

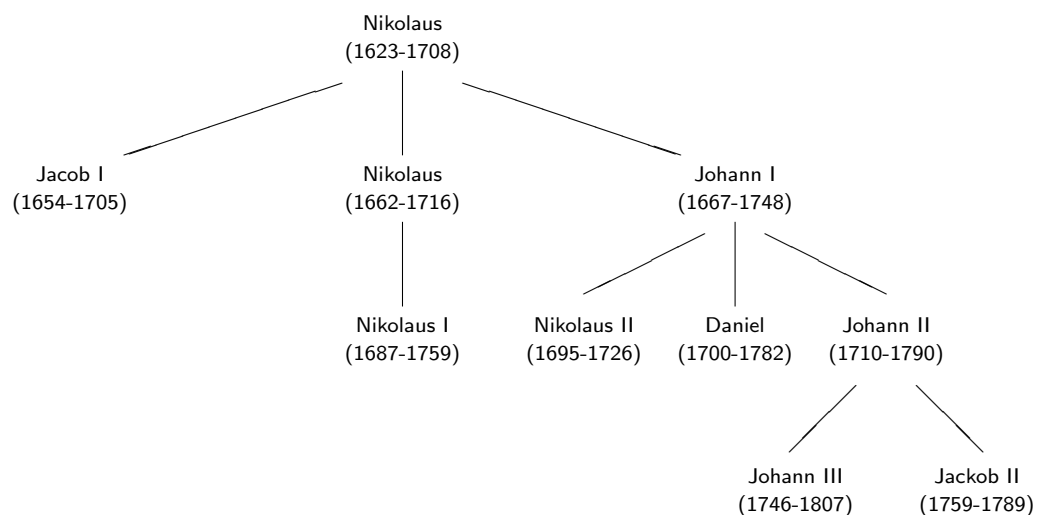
¹¹Este problema do caixeiro-viajante é um exemplo de problema que tem desafiado os investigadores na procura de um bom algoritmo. Pertence a uma classe de problemas conhecidos como *NP-completos* ou *NP-difíceis*, para os quais não se acredita ser possível encontrar um algoritmo de complexidade polinomial. Uma das actividades mais importantes na Matemática Discreta é a procura de algoritmos eficientes que forneçam uma boa aproximação da solução óptima destes problemas. É o que acontece com o problema do caixeiro-viajante para o qual já existem alguns algoritmos heurísticos que fornecem rapidamente uma solução aproximada.

2.2. Árvores

Todos nós estamos familiarizados com a ideia de árvore genealógica:

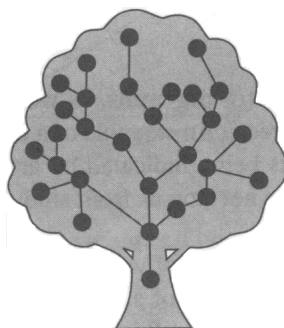


Tal diagrama é um grafo no qual os vértices representam membros da família e as arestas representam relações de parentesco (descendência). Por exemplo,

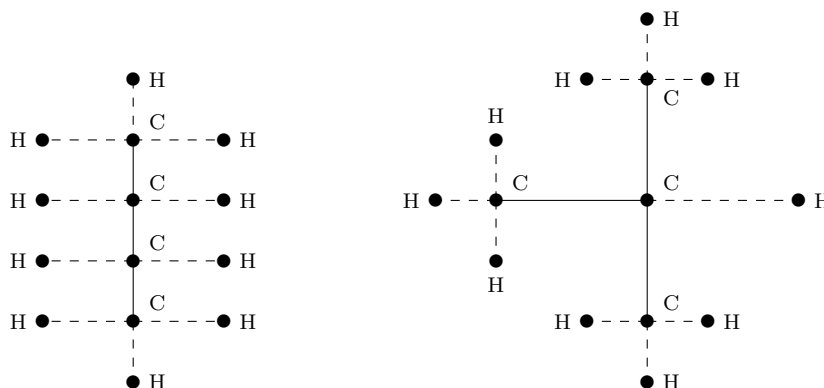


representa a famosa família de matemáticos suíços Bernoulli.

Os grafos que representam árvores genealógicas são exemplos de um tipo especial de grafo, que abordaremos nesta secção, chamado *árvore*.



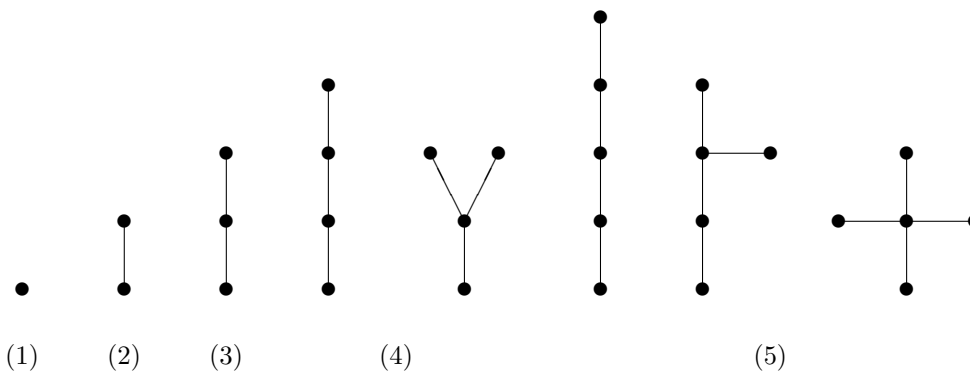
Outros exemplos de árvores são dados por algumas moléculas orgânicas — os vértices representando os átomos e as arestas as ligações entre eles:



A. Cayley foi o primeiro a estudar árvores de modo sistemático¹². Mais tarde¹³, aplicou esse estudo à química orgânica, mostrando a sua utilidade na enumeração de compostos químicos. Esta enumeração conduziu-o à descoberta de compostos desconhecidos.

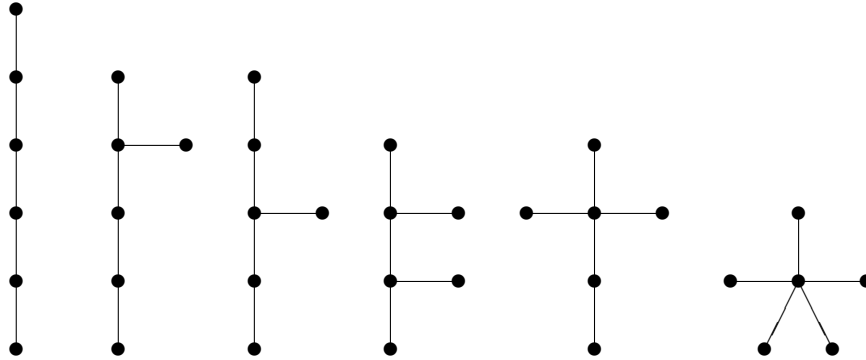
Por *árvore* entende-se um grafo simples, conexo, sem ciclos.

A figura seguinte contém todas as árvores estruturalmente diferentes (ou seja, não isomorfas) com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 vértices.



¹²Nos artigos [A. Cayley, *On the theory of the analytical forms called trees*, Philosophical Magazine 13 (1857) 172-176] e [A. Cayley, *On the theory of the analytical forms called trees, part II*, Philosophical Magazine 18 (1859) 374-378].

¹³Nos artigos [A. Cayley, *On the mathematical theory of isomers*, Philosophical Magazine 47 (1874) 444-446] e [A. Cayley, *On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*, Rep. Brit. Advance Sci. 45 (1875) 257-305].



(6)

Como veremos, as árvores têm “boas” propriedades. Muitas vezes, na tentativa de provar um resultado geral para grafos, começa-se por tentar prová-lo para árvores. De facto, existem muitas conjecturas que ainda não foram provadas para grafos arbitrários mas que já se sabe serem verdadeiras para as árvores.

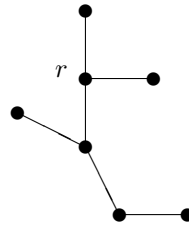
Em qualquer grafo conexo, dados dois vértices arbitrários distintos, existe sempre um caminho sem repetição de vértices ligando-os. O resultado seguinte diz-nos que as árvores são precisamente os grafos conexos nos quais cada par de vértices distintos está ligado por exactamente um caminho sem repetição de vértices:

Teorema 1. *Um grafo simples G é uma árvore se e só se quaisquer dois vértices de G estão ligados por um único caminho sem repetição de vértices.*

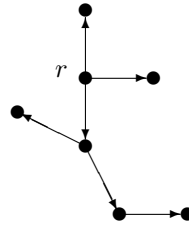
Prova. Seja G uma árvore e sejam x e y dois vértices de G . Como G é conexo, existe um caminho sem repetição de vértices que os liga. Resta provar que este caminho é único. Se existisse outro caminho, o caminho formado pela combinação do primeiro, de x para y , com o caminho de y para x obtido seguindo o segundo caminho na direcção de y para x , formaria um ciclo, o que seria uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que existe um único caminho sem repetição de vértices unindo quaisquer dois vértices de G . Então G é claramente conexo. Além disso, não poderá ter ciclos: se contivesse um ciclo, contendo os vértices x e y , existiriam evidentemente dois caminhos sem repetição de vértices unindo x a y (pois qualquer ciclo que passe por x e y é constituído por dois caminhos sem repetição de vértices, um unindo x a y , o outro unindo y a x). \square

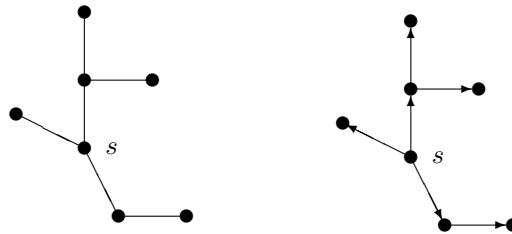
Fixando um vértice qualquer r de uma árvore é possível, usando o teorema anterior, dar uma direcção a todas as arestas do seguinte modo: como existe um único caminho de r para cada um dos restantes vértices do grafo, direccionamos cada aresta usando esses caminhos. Por exemplo, na árvore



fixando o vértice r indicado, obtemos



Este grafo dirigido diz-se uma *árvore com raiz r* . Outra escolha de raiz produzirá outra árvore com raiz:



Teorema 2. *Uma árvore com n vértices possui $n - 1$ arestas.*

Prova. Fixando um vértice qualquer r , e construindo a respectiva árvore com raiz r , é evidente que existe uma correspondência bijetiva entre as arestas da árvore e os vértices diferentes de r (a cada seta corresponde o respectivo vértice terminal). Como há $n - 1$ vértices diferentes de r , a árvore tem $n - 1$ arestas. \square

A terminologia para as árvores inspira-se na botânica e na genealogia. Seja G uma árvore com raiz r . Se v é um vértice diferente de r , o *pai* (ou *ascendente* de v é o único vértice u para o qual existe uma aresta dirigida de u para v . Nesse caso, v diz-se um *descendente* ou *filho* de u . Um vértice de G é uma *folha* se não tiver descendentes. Os vértices que têm descendentes dizem-se *vértices internos*.

G diz-se uma *árvore m -ária* se todo o vértice interno não tiver mais de m descendentes. No caso $m = 2$, a árvore chama-se uma *árvore binária*. A árvore diz-se uma *árvore m -ária plena* se todo o vértice interno tiver exactamente m descendentes.

Qualquer folha tem grau 1. Sabemos pelo Lema dos apertos de mão (Proposição 1 da Secção 2.1) que a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro do número das arestas. Se G for uma árvore com vértices v_1, v_2, \dots, v_n e m arestas, então $m = n - 1$ pelo Teorema 2. Logo

$$\sum_{i=1}^n g(v_i) = 2m = 2(n - 1).$$

Consequentemente, no caso de G não ser K_1 , como não existem vértices isolados, existem pelo menos dois vértices de grau 1. Podemos assim afirmar que toda a árvore diferente de K_1 possui pelo menos dois vértices de grau 1.

Teorema 3. *Uma árvore m -ária plena com i vértices internos possui $n = mi + 1$ vértices.*

Prova. Todo o vértice, com exceção da raiz, é descendente de um vértice interno. Como cada um dos i vértices internos tem m descendentes, existem mi vértices na árvore além da raiz. Assim, no total existem $mi + 1$ vértices. \square

Sejam n o número de vértices, i o número de vértices internos e l o número de folhas de uma árvore com raiz. Se a árvore for m -ária plena é possível, a partir de qualquer um dos números n , i ou l determinar os outros dois:

Teorema 4. *Uma árvore m -ária plena com*

- (a) n vértices tem $i = \frac{n-1}{m}$ vértices internos e $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$ folhas,
- (b) i vértices internos tem $n = mi + 1$ vértices e $l = (m-1)i + 1$ folhas,
- (c) l folhas tem $n = \frac{ml-1}{m-1}$ vértices e $i = \frac{l-1}{m-1}$ vértices internos.

Prova. Evidentemente $n = i + l$. Esta igualdade, em conjunto com a do Teorema 3, permite provar facilmente as três afirmações. Provaremos somente a primeira, uma vez que as outras duas se podem provar de modo análogo:

Pelo Teorema 3, $n = mi + 1$, ou seja $i = \frac{n-1}{m}$. Então

$$l = n - i = n - \frac{n-1}{m} = \frac{(m-1)n+1}{m}.$$

\square

