Ano lectivo 2010/11 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 14/1/2011

Soluções

1.

p	q	r	$p \wedge r$	$p \vee q \rightarrow \neg r$	$p \wedge r \wedge (p \vee q \rightarrow \neg r)$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

Trata-se pois de uma contradição.

2. (a) $q \rightarrow r$.
   (b) $p \rightarrow r$.
   (c) $q \rightarrow p$.
   (d) $q \rightarrow p$.
   (e) $q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

3.

Sentenças	Mundo A	Mundo B
(a) $Cube(a) \vee Tet(b)$	V	F
(b) $\neg(Large(b) \rightarrow Small(d))$	V	V
(c) $\exists x(Tet(x) \wedge RightOf(x,a) \wedge \neg Small(x))$	V	V
(d) $\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow Smaller(x,y))$	V	F
(e) $\exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall y(Cube(y) \rightarrow Between(y,x,b)))$	V	F

4. O caso $n = 1$ é evidente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

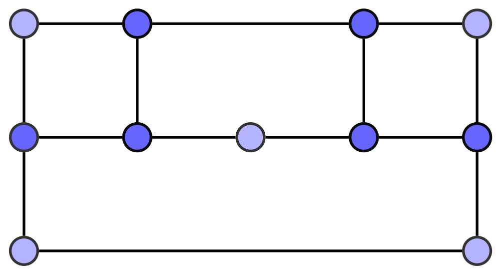
Suponhamos agora que a identidade vale para um dado natural n (hipótese de indução HI) e provemos que então também vale para o seu sucessor $n+1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{HI}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

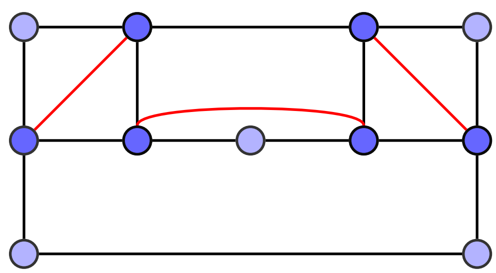
5. $\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=1}^{20}(i-j) = \sum_{i=1}^{30}(\sum_{j=1}^{20} i - \sum_{j=1}^{20} j) = \sum_{i=1}^{30}(i\sum_{j=1}^{20} 1 - \frac{20\times 21}{2}) = \sum_{i=1}^{30}(20i-210) = \sum_{i=1}^{30} 20i - \sum_{i=1}^{30} 210 =$
$20\sum_{i=1}^{30} i - 210\sum_{i=1}^{30} 1 = 20\times\frac{30\times 31}{2} - 210\times 30 = 30(310-210) = 3000.$

6. Calculando os primeiros termos da sucessão obtemos $a_1 = 5 \mod 7 = 5$, $a_2 = 9 \mod 7 = 2$ e $a_3 = 3 \mod 7 = 3 = a_0$ pelo que imediatamente $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2$, etc. (a sucessão é periódica, de período 3). Como $28 = 3\times 9 + 1$ então $a_{28} = a_1 = 5$.

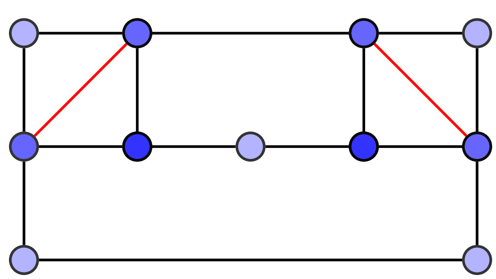
7. (a) Um grafo para ser euleriano tem que ter todos os vértices com grau par. O grafo



tem 5 vértices de grau par e 6 vértices de grau ímpar (marcados a tom mais escuro na figura). Como cada aresta liga dois vértices, precisamos de juntar pelo menos 3 arestas ao grafo para que estes 6 vértices aumentem de grau uma unidade passando a ter grau par. Por exemplo:



No caso semi-euleriano, o grafo terá que ter 2 vértices de grau ímpar (que serão os vértices de partida e chegada do caminho semi-euleriano) e os restantes de grau par. Portanto basta juntar duas arestas:



(b) Em K_n cada vértice está ligado aos restantes $n-1$ vértices; portanto, o grau de cada vértice é igual a $n-1$ pelo que o grafo é euleriano se e só se $n-1$ é par, isto é, se e só se ***n* é ímpar**.

Como em qualquer grafo a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número a de arestas, em K_n temos $\sum_{i=1}^{n}(n-1) = 2a$, isto é, $n(n-1) = 2a$. Logo $a = \frac{n-1}{2}n$ e como $n-1$ é par então $\frac{n-1}{2}$ é um inteiro e consequentemente a é um múltiplo de n.

8. (a) $23 = 3 \times 6 + 5$, $6 = 1 \times 5 + 1$ e $5 = 5 \times 1 + 0$ pelo que $\text{mdc}(23, 6) = 1$ (os números são primos entre si).

   (b) Da alínea anterior podemos concluir que $1 = 6 - 5 = 6 - (23 - 3 \times 6) = 4 \times 6 - 23$. Isto mostra que $x = 4$ é uma solução da congruência $6x \equiv_{23} 1$. Então

   $$\{4 + 23k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

   é o conjunto de todas as soluções.

   (c) Determinemos a função de desencriptação, que é a função inversa de $f(p) = (6p + 1) \bmod 23$:

   $$q = (6p+1) \bmod 23 \Leftrightarrow q - 1 = 6p \bmod 23 \Leftrightarrow p = 4(q-1) \bmod 23$$

   pois pela alínea anterior 4 é o inverso de 6 em $\mathbb{Z}_{23}$. Portanto

   $$f^{-1}(q) = 4(q-1) \bmod 23.$$

   Assim $f^{-1}(\text{H}) = f^{-1}(7) = 4(7-1) \bmod 23 = 1 = \text{B}$, $f^{-1}(\text{L}) = f^{-1}(10) = 36 \bmod 23 = 13 = \text{O}$, $f^{-1}(\text{X}) = f^{-1}(21) = 80 \bmod 23 = 11 = \text{M}$, $f^{-1}(\text{B}) = f^{-1}(1) = 0 \bmod 23 = 0 = \text{A}$, $f^{-1}(\text{E}) = f^{-1}(4) = 12 \bmod 23 = 12 = \text{N}$, $f^{-1}(\text{L}) = f^{-1}(10) = \text{O}$, e a mensagem original é

   "BOM ANO"

9. (a) Cada combinação com repetição de n elementos (de um conjunto S) r a r pode ser representada por uma sequência de $n-1$ barras e r asteriscos, do seguinte modo: as barras são utilizadas para demarcar em n células os n diferentes elementos de S, com a i-ésima célula contendo um asterisco sempre que o i-ésimo elemento de S ocorre na combinação. Por exemplo, para $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

Multi-conjunto	Representação
$\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	$**\mid*\mid\mid***$
$\{a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3\}$	$\mid**\mid****\mid$

   Assim o número de combinações com repetição de n elementos r a r coincide com o número destas sequências que se podem formar com $n-1$ barras e r asteriscos. O número de tais sequências é igual a $C(n-1+r, r)$, uma vez que cada sequência corresponde a uma escolha de r posições (das $n-1+r$ posições disponíveis) para colocar os r asteriscos (após a escolha das posições onde vão ficar os asteriscos, as barras ficam automaticamente nas posições restantes).

   Portanto

   $$\overline{C}(n, r) = C(n-1+r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!}.$$

(b) O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, $(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0)$, é igual a

$$\overline{C}(4, 10).$$

De facto, qualquer combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 10 a 10 contém, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, x_i elementos iguais a a_i tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$; por outro lado, é evidente que a cada sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) de inteiros positivos ou nulos satisfazendo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, podemos fazer corresponder a combinação com repetição de elementos de S, 10 a 10,

$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{x_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{x_2 \text{ vezes}}, \underbrace{a_3, a_3, \ldots, a_3}_{x_3 \text{ vezes}}, \underbrace{a_4, a_4, \ldots, a_4}_{x_4 \text{ vezes}}\}.$$

Assim, usando a alínea (a), a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ tem

$$\overline{C}(4, 10) = C(4 - 1 + 10, 10) = C(13, 10) = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 13 \times 22 = 286$$

soluções.