

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. A clareza da exposição será valorizada. A não justificação será penalizada.

Na questão 2(a) de escolha múltipla, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação**.

Não é permitido consultar apontamentos nem usar máquina de calcular.

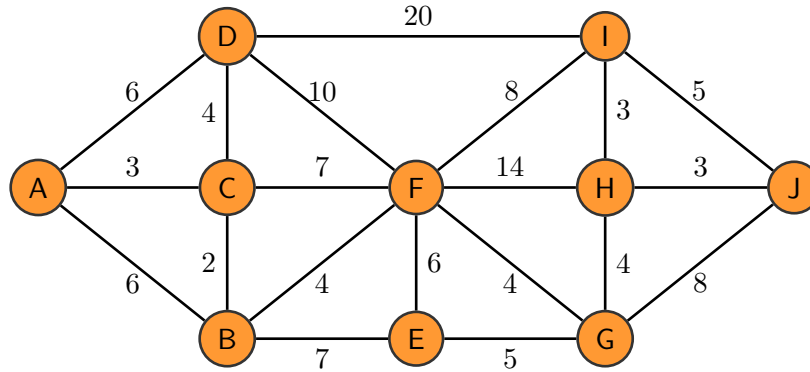
Duração: 2h30m

1. (a) Representando as proposições atómicas nas frases seguintes por símbolos p, q, r, \dots , traduza as deduções seguintes para a linguagem do cálculo proposicional:
 - (1) *Se chove frequentemente, os agricultores queixam-se.*
Se não chove frequentemente, os agricultores queixam-se.

 \therefore Os agricultores queixam-se.
 - (2) *Se n é um número primo então n é ímpar ou igual a 2.*
 n é um número par.

 $\therefore n$ não é primo.
 - (b) Indique, justificando, se estas deduções estão correctas.
2. Para cada um dos mundos A e B em anexo
 - (a) Indique o valor lógico (**V**: verdade; **F**: falso) das seguintes cinco afirmações.
 - (1) $Dodec(a) \rightarrow (Tet(b) \wedge Tet(c))$.
 - (2) $\exists x \forall y \text{ Smaller}(x, y)$.
 - (3) $\exists x \forall y (Dodec(y) \rightarrow \text{Smaller}(y, x))$.
 - (4) $\forall x (\text{Small}(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge \text{SameCol}(x, y)))$.
 - (5) $\forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Medium}(x)) \rightarrow \neg \exists y \text{ BackOf}(y, x))$.
 - (b) Em (4) e (5), nos casos de afirmações falsas, apresente um contra-exemplo.
 3. Calcule:
 - (a) $\sum_{n=0}^5 n!$.
 - (b) $\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{30} (i + 2j)$.
 - (c) As soluções da congruência linear $40x \equiv_6 24$ no conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - (d) A equação $4 \times_{12} x = 1$ tem solução em $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$? Justifique.
 4. Uma cadeia binária (sequência de 0's ou 1's) com 8 dígitos ("bits") designa-se por "byte".
 - (a) Quantos bytes se podem formar?
 - (b) Quantos bytes começam por 10 e terminam em 01.
 - (c) Quantos bytes começam por 10 e não terminam em 01.
 - (d) Quantos bytes começam por 10 ou terminam em 01.
 - (e) Quantos bytes contêm pelo menos 3 zeros e pelo menos 2 uns? →

5. No grafo



determine o trajecto mais curto:

- (a) de A para J .
- (b) de A para I .

6. (a) O grafo com matriz de adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma árvore?

- (b) Numa árvore com 14 vértices, alguns de grau 1 e os restantes de grau 5, quantos são os vértices de grau 5?

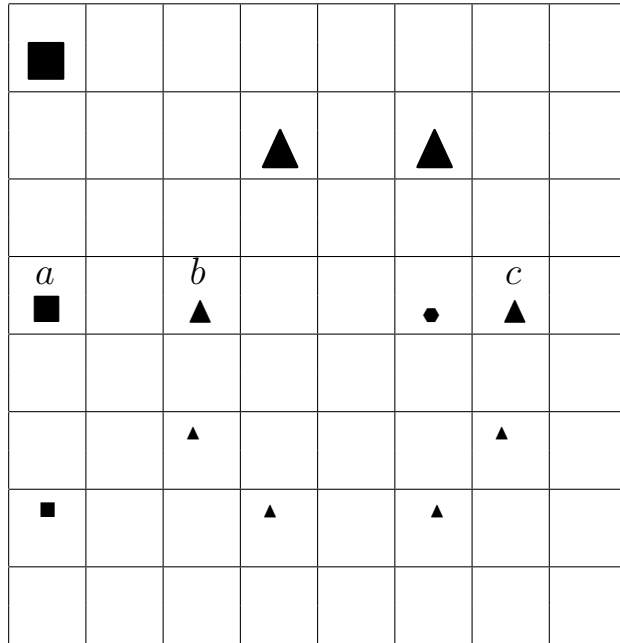
7. Considere a seguinte função definida em \mathbb{N}_0 .

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 4f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ for par e } n > 0 \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

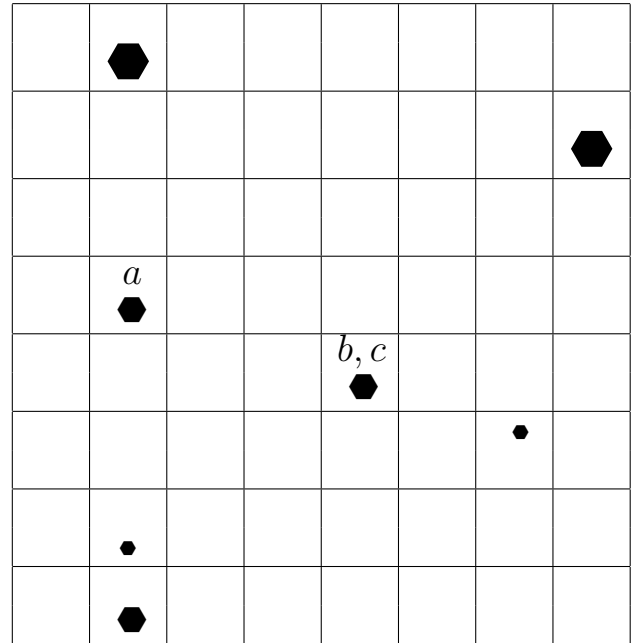
Mostre, usando indução matemática, que $f(n) = n^2$ para qualquer $n \geq 0$.

- 8. (a) Enumere todas as combinações com repetição de comprimento 2 que podem ser formadas com as letras A, B, C, D, E .
- (b) Deduza a fórmula para o cálculo do número $\overline{C}(n, r)$ de combinações com repetição de n elementos r a r .

Mundo A



Mundo B



- ▲ Tetraedro Pequeno
- ▲ Tetraedro Médio
- ▲ Tetraedro Grande

- Cubo Pequeno
- Cubo Médio
- Cubo Grande

- Dodecaedro Pequeno
- ⬡ Dodecaedro Médio
- ⬡ Dodecaedro Grande

Smaller(a, b): a é menor que b.

SameCol(a, b): a e b estão na mesma coluna.

BackOf(a, b): a está numa linha acima da linha de b.