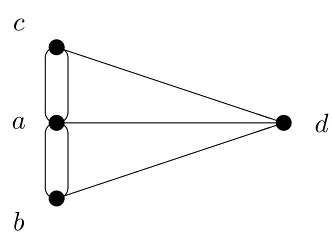
Departamento de Engenharia Informática da Universidade de Coimbra

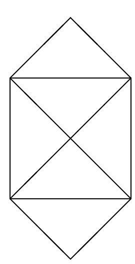
Estruturas Discretas 2012/13 $\boxed{\text{Folha 4 - TP}}$

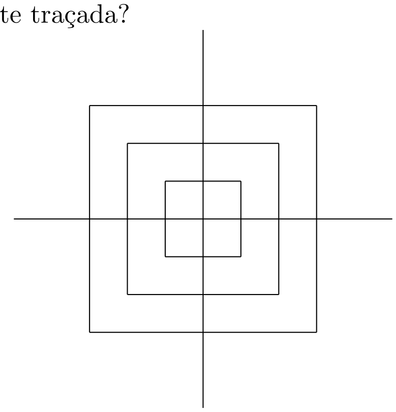
Grafos

1. Quantos vértices poderá ter um grafo simples regular com 24 arestas?
2. Desenhe todos os grafos não dirigidos simples conexos, não isomorfos entre si, de n vértices, para
   (a) $n = 2$.
   (b) $n = 3$.
   (c) $n = 4$.
3. Considere um rectângulo, atravessado por n rectas, e as regiões que estas nele determinam. Associe um vértice a cada região e una dois vértices por uma aresta se as respectivas regiões tiverem um segmento de uma das rectas a separá-las. Prove que o grafo assim construído é bipartido.
4. Seja G um grafo simples com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
   (a) Que pode dizer sobre a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz de incidência de G?
   (b) Mostre que o número de elementos não-nulos da matriz de adjacência de G é igual ao número de elementos não-nulos da matriz de incidência.
5. Considere o seguinte grafo G:



   (a) G é euleriano?
   (b) Qual o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo G de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel?
6. Quais dos seguintes desenhos podem ser feitos sem levantar a ponta do lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?





7. Considere um grafo simples conexo $G = (V, A)$ com 5 vértices, cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Qual é a sequência de graus dos vértices de G?

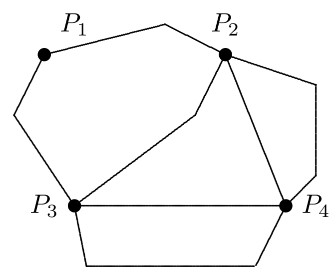
(b) Existem caminhos $v_4 - v_5$ de comprimento 2?

(c) Mostre que G não é euleriano. E é semi-euleriano? (isto é, tem um caminho euleriano aberto?)

8. (a) Desenhe o grafo completo de três vértices, K_3. Defina caminho euleriano e diga, justificando, se K_3 possui um caminho euleriano.

(b) Diga, justificando, quais os grafos completos K_n $(n \geq 1)$ que têm um caminho euleriano.

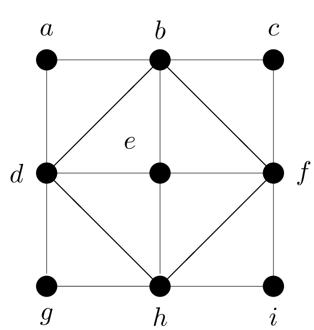
9. Este ano o cortejo da Queima das Fitas deve percorrer uma só vez todas as ruas da área representada, partindo de uma das praças P_1, P_2, P_3 ou P_4 e regressando à mesma praça.

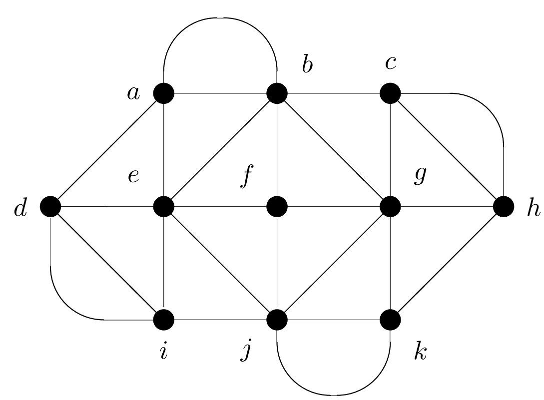


(a) Diga se é possível encontrar um percurso nestas condições. Se a sua resposta for afirmativa, copie a figura para o seu papel, e represente-o.

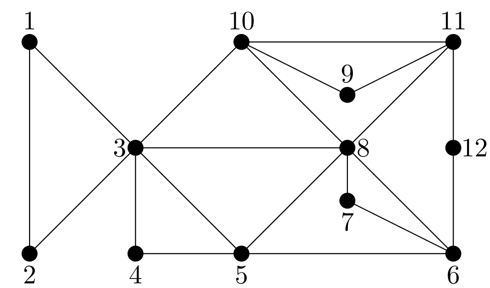
(b) Determine a matriz de adjacências do grafo.

10. Qual dos seguintes grafos é euleriano? Exiba um caminho euleriano desse grafo.





11. O grafo



é euleriano. Determine um seu caminho euleriano e uma sua partição em ciclos.

12. Seja G um grafo euleriano. Consideremos $L(G)$ o grafo definido do seguinte modo:

    (a) $V(L(G)) = A(G)$;

    (b) $\{a_i, a_j\} \in A(L(G))$ se e só se a_i e a_j forem, em G, arestas incidentes no mesmo vértice.

    Prove que $L(G)$ também é euleriano.

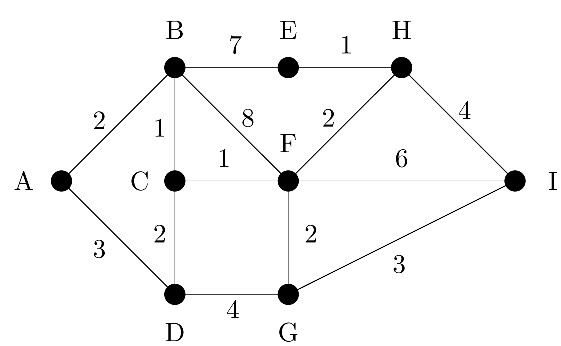
13. Os custos de ligação (em milhares de contos) entre 7 acampamentos no deserto, $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $A5$, $A6$, $A7$, e uma fonte de água F são dados pelo seguinte quadro (onde a cruz $\times$ significa que, por razões de ordem técnica, é impossível ligar os dois pontos respectivos):

	$A1$	$A2$	$A3$	$A4$	$A5$	$A6$	$A7$
F	1	4	6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$A1$		5	$\times$	2	4	$\times$	$\times$
$A2$			2	$\times$	7	4	$\times$
$A3$				$\times$	$\times$	6	$\times$
$A4$					1	$\times$	7
$A5$						3	5
$A6$							2

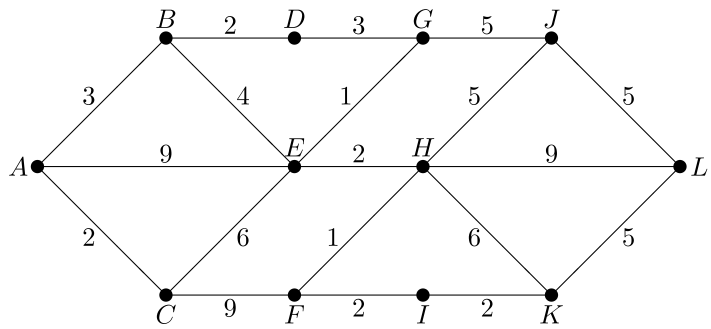
    (a) Qual é o custo mínimo de ligar a fonte F ao acampamento $A7$?

    (b) Para esse custo, qual é o número máximo de acampamentos que será possível irrigar?

14. Determine o caminho mais curto de A para I em



15. Mostre que o Algoritmo de Dijkstra pode ser adaptado para se obter o caminho mais longo de A para L no seguinte grafo:



16. Enumere todas as árvores com 5 arestas (nenhum par de árvores nessa lista poderá ser isomorfo).

17. Quantos vértices de grau 1 tem uma árvore com dois vértices de grau 2, quatro vértices de grau 3, três vértices de grau 4 e nenhum de grau superior a 4?

18. Seja G uma árvore com 7 vértices.

    (a) Diga, justificando sucintamente, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

        (i) G pode ter todos os vértices de grau 1.

        (ii) G pode ter dois vértices de grau 1 e cinco de grau 2.

        (iii) G pode ter cinco vértices de grau 1 e dois de grau 2.

    (b) Quantos vértices de grau 1 terá G se tiver dois vértices de grau 3?

19. Poderá haver uma árvore com 13 vértices, dois dos quais de grau 7?

20. Mostre que qualquer árvore é um grafo bipartido. Quais são os grafos bipartidos completos que são árvores?