








Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. Na questão **2(a)**, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor.










Duração: 2h00m

1. (a) Quando é que duas fórmulas bem formadas da lógica de proposições se dizem *logicamente equivalentes*?
- (b) Calcule a tabela de verdade da fórmula  $\neg(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge p$ .
- (c) Indique se se trata de uma fórmula logicamente equivalente a  $q \vee \neg p$ .
- (d) Simplifique a fórmula da alínea (b).
  
2. (a) Indique o valor lógico (V: verdade; F: falso) das seguintes sentenças nos mundos *A* e *B* em anexo.
  - (a1)  $Small(a) \leftrightarrow SameRow(b, c)$ .
  - (a2)  $\exists x (Dodec(x) \vee SameRow(x, b))$ .
  - (a3)  $\exists x \forall y (\neg SameShape(x, y) \rightarrow RightOf(x, y))$ .
  - (a4)  $\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Dodec(y) \wedge LeftOf(x, y)))$ .
  - (a5)  $\forall x \forall y (SameShape(x, y) \wedge SameCol(x, y) \rightarrow SameSize(x, y))$ .
- (b) Nos casos em que as fórmulas (a2) e (a3) são verdadeiras, indique todos os objectos *x* que as satisfazem.

																			
			<i>a</i>																
																			
																			
	<i>d</i>	<i>c</i>				<i>b</i>				<i>e</i>									

Mundo A

Mundo B

- |   |  |  |
|---|--|--|
|  Tetraedro Pequeno |  Cubo Pequeno |  Dodecaedro Pequeno |
|  Tetraedro Médio   |  Cubo Médio   |  Dodecaedro Médio   |
|  Tetraedro Grande  |  Cubo Grande  |  Dodecaedro Grande  |

3. Traduza as seguintes sentenças para a linguagem da lógica de primeira ordem do Mundo de Tarski, usando os predicados  $Cube(x)$ ,  $Large(x)$ ,  $LeftOf(x, y)$ ,  $BackOf(x, y)$ ,  $Larger(x, y)$ ,  $Tet(x)$ ,  $RightOf(x, y)$ .

(a)  $a$  é um cubo grande à esquerda de  $b$ .

(b) Todos os cubos estão atrás de  $b$ .

(c) Se um cubo é grande então é maior do que todos os tetraedros.

(d) Quaisquer dois objectos que sejam cubos estão à esquerda de  $b$  ou ambos à direita de  $b$ .

4. As demonstrações das seguintes proposições estão erradas!

P1: *Seja  $x$  um número real diferente de 4. Se  $\frac{2x - 5}{x - 4} = 3$ , então  $x = 7$ .*

Dem: Suponhamos que  $x = 7$ . Então  $\frac{2x - 5}{x - 4} = \frac{2 \cdot 7 - 5}{7 - 4} = \frac{9}{3} = 3$ . Portanto, se  $\frac{2x - 5}{x - 4} = 3$ , então  $x = 7$ .  $\square$

P2: *Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais tais que  $x + y = 10$ . Então  $x \neq 3$  e  $y \neq 8$ .*

Dem: Suponhamos por absurdo que  $x = 3$  e  $y = 8$ . Então  $x + y = 11$ , o que contraria a hipótese de que  $x + y = 10$ . Logo  $x \neq 3$  e  $y \neq 8$ .  $\square$

(a) Indique onde está o erro de raciocínio em cada uma delas.

(b) Indique se estas proposições são verdadeiras ou não e, no caso afirmativo, apresente uma demonstração correcta.

5. Escreva as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

(a)  $\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{8}x^9 - \frac{1}{10}x^{11} + \frac{1}{12}x^{13} - \frac{1}{14}x^{15} + \frac{1}{16}x^{17}$ .

(b)  $n + \frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{3} + \dots + \frac{2n}{n+1}$ .

6. Calcule:

(a)  $\sum_{i=1}^{30} 2(i - 22)$ ;

(b)  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 (i + ij)$ .

(c) Os primeiros 100 termos da progressão aritmética de razão  $r = 1$  e primeiro termo  $a = 10$ .

7. Demonstre, por indução, que  $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ .

8. Desenhe o pseudografo de vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  cuja matriz de adjacência é a matriz  $A$ . Qual é o grau de  $v_3$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

---