

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

*Duração: 2h00m*

---

1. A seguinte tabela indica o comprimento (em centenas de  $Km$ ) das estradas que formam uma rede rodoviária ligando entre si oito cidades ( $A, B, \dots, H$ ):

	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
$A$	×	25	×	35	×	×	10
$B$		25	20	×	10	×	×
$C$			×	×	15	5	×
$D$				×	15	×	×
$E$					×	×	20
$F$						30	×
$G$							25

- (a) Desenhe um grafo com pesos que represente esta rede rodoviária, colocando os vértices na posição seguinte:

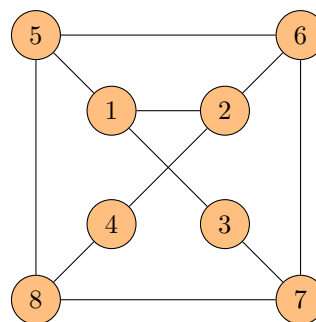
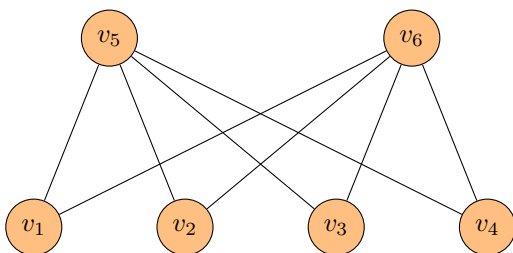
$$\begin{array}{ccc}
 B & A & E \\
 & F & C & H \\
 D & & G & 
 \end{array}$$

- (b) Use o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho mais curto da cidade  $D$  para a cidade  $E$ .

2. Quais dos seguintes grafos são

- (a) eulerianos? (nos casos em que a resposta é negativa indique o número mínimo de arestas a acrescentar necessárias para o tornar euleriano.)

- (b) hamiltonianos?



3. (a) Uma árvore  $T$  tem apenas vértices de grau 1 e vértices de grau 5. Se  $T$  tem 14 vértices, quantos desses vértices têm grau 5? Desenhe a árvore  $T$ .
- (b) Um grafo diz-se *bipartido* se o seu conjunto de vértices pode ser partido em dois subconjuntos disjuntos não vazios,  $V_1$  e  $V_2$ , de tal modo que toda a aresta do grafo incide num elemento de  $V_1$  e noutro de  $V_2$ . Mostre que toda a árvore é um grafo bipartido.

4. Calcule:

(a)  $\text{mdc}(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13, 2^{11} \times 3^9 \times 11 \times 17^{14})$ .

(b) Todas as soluções da congruência linear  $6x \equiv 1 \pmod{23}$  no conjunto

$$\{-20, -19, \dots, -1, 0, 1, \dots, 29, 30\}.$$

5. Descodifique a mensagem “ICQDT EBSBQ”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (6p + 1) \pmod{23},$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros  $0, 1, 2, \dots, 22$  (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

6. Aplicando os princípios da adição e/ou da multiplicação determine:

- (a) quantos números de 4 algarismos se podem formar com os algarismos  $1, 2, \dots, 9$ , de modo que nenhum deles tenha algarismos repetidos e todos contenham o algarismo 5.
- (b) quantos números maiores do que 555 se podem formar com 3 algarismos, nos quais o primeiro algarismo é diferente do último.

7. Calcule:

(a)  $C(11, 3)$  e  $\overline{C}(4, 8)$ .

(b) o coeficiente de  $x^3y^8$  no desenvolvimento de  $(x + y)^{11}$ .

8. O Departamento de Criptografia dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto ABC. A mensagem a transmitir é composta por 12 símbolos distintos mais 45 espaços em branco iguais.

Quantas mensagens diferentes (de comprimento 57) podem ser formadas com esses 12 símbolos e 45 espaços em branco?

(Note que a mensagem pode começar ou terminar com espaços em branco.)

---