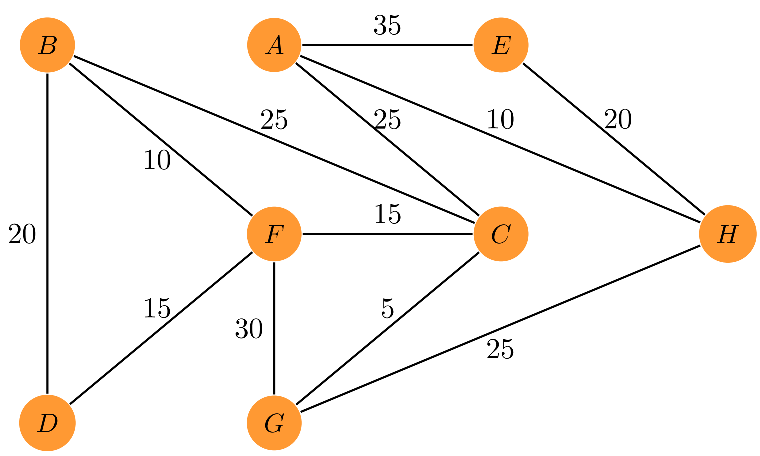
Ano lectivo 2012/13 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 19/12/2012

SOLUÇÕES

---

1. (a)



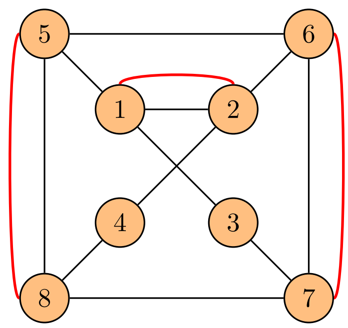
(b) Iterando o algoritmo de Dijkstra obtemos o caminho mais curto de D até E:

$$D - F - C - G - H - E,$$

com comprimento 80.

Resolução alternativa: a única maneira de chegar a E sem passar por C é passando por $F - G - H$. Como o comprimento de $F - G - H$ é maior que $F - C - G$ então o caminho mais curto de D a E terá que necessariamente passar por C. Além disso, é evidente que o caminho mais curto de D até C é $D - F - C$ (basta calcular o comprimento de todas as alternativas) e, analogamente, o caminho mais curto de C a E é $C - G - H - E$.

2. (a) O grafo da esquerda é euleriano pois os vértices têm todos grau par. O grafo da direita não, pois tem vértices de grau ímpar. Como são exactamente 6 os vértices de grau ímpar, será necessário acrescentar 3 arestas para os tornar de grau par e o grafo passar a ser euleriano. Por exemplo:



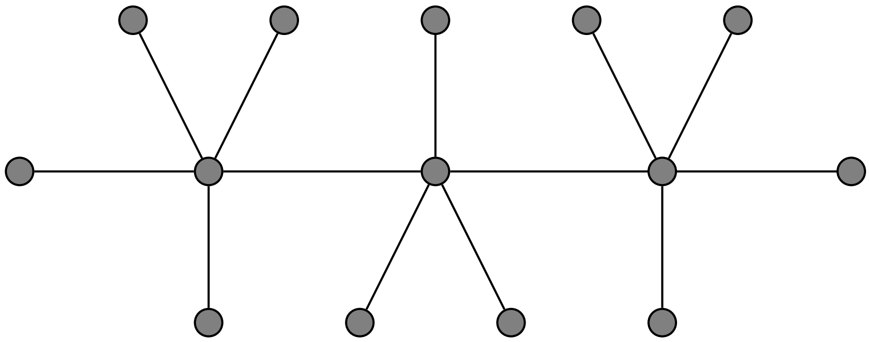
(b) O grafo da esquerda não é hamiltoniano pois sendo um grafo bipartido (em dois conjuntos de vértices com cardinalidades diferentes, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $V_2 = \{v_5, v_6\}$), qualquer caminho no grafo terá que saltar entre vértices de V_1 e de V_2, pelo que nunca conseguiremos encontrar nenhum caminho que passe por todos os vértices sem repetir nenhum de V_2 (pois são menos que os de V_1).

O grafo da direita é hamiltoniano: $5 - 1 - 3 - 7 - 6 - 2 - 4 - 8 - 5$.

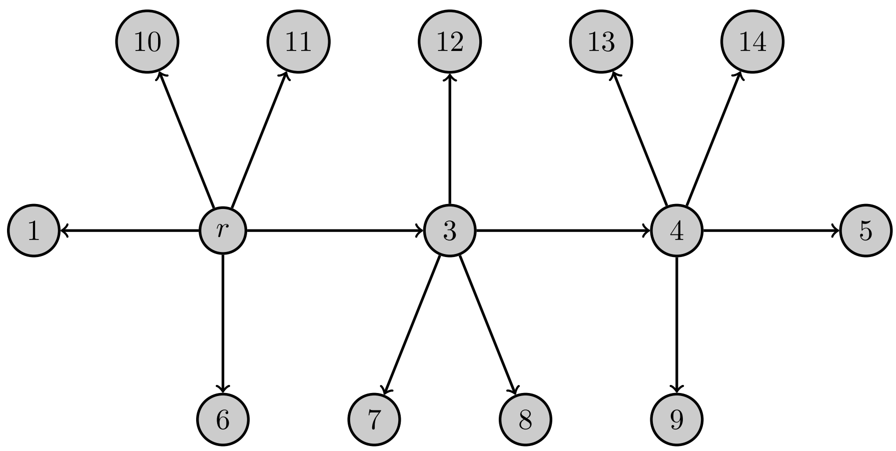
3. (a) O número a de arestas de uma árvore com n vértices é igual a $n-1$. Seja x o número de vértices de grau 5 de T (portanto, T tem $14-x$ vértices de grau 1). Então

$$\sum_{i=1}^{14} g(v_i) = 2a = 2 \times 13 = 26,$$

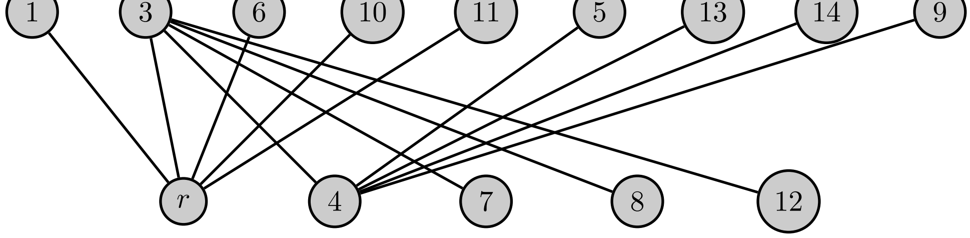
pelo que $(14-x)+5x = 26$. Logo $4x = 12$, isto é, $x = 3$. T será então a árvore



(b) Seja T uma árvore arbitrária com raiz r. Podemos distribuir os vértices de T por dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 do seguinte modo: colocamos em V_1 os vértices que estão a uma distância ímpar de r (isto é, o caminho único de r até esse vértice tem um número ímpar de arestas); os vértices restantes, que estão a uma distância par, vão para V_2. Por exemplo, na árvore acima, fixada a raiz r,



então $V_1 = \{1,3,6,10,11,5,13,14,9\}$ e $V_2 = \{r,4,7,8,12\}$:



É agora evidente que todas as arestas de T ligam vértices de V_1 a V_2, não havendo nenhuma aresta em T que ligue dois vértices de V_1 ou dois vértices de V_2 (senão a árvore continha ciclos!).

4. (a) $\text{mdc}(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13, 2^{11} \times 3^9 \times 11 \times 17^{14}) = 2 \times 3 \times 11 = 66.$

(b) Como $4 \times_{23} 6 = 1$, então

$$\begin{aligned} 6x \equiv_{23} 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \times_{23} 6 \times_{23} x \equiv_{23} 4 \times_{23} 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv_{23} 4. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções para x são os inteiros da forma $4 + 23k$. Quais deles pertencem ao conjunto $\{-20, -19, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 29, 30\}$? Precisamente os números $-19, 4, 27$.

5. Cálculo da função de desencriptação (usando a questão anterior):

$$q = f(p) = (6p + 1) \bmod 23 \Leftrightarrow q \equiv_{23} 6p + 1 \Leftrightarrow 4q \equiv_{23} 4(6p + 1) = p + 4 \Leftrightarrow p \equiv_{23} 4q - 4.$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 4(q - 1) \bmod 23$. Logo:

$f^{-1}(I) = f^{-1}(8) = 28 \bmod 23 = 5 = \mathbf{F}$, $\quad f^{-1}(C) = f^{-1}(2) = 4 \bmod 23 = 4 = \mathbf{E}$,

$f^{-1}(Q) = f^{-1}(15) = 56 \bmod 23 = 10 = \mathbf{L}$, $\quad f^{-1}(D) = f^{-1}(3) = 8 \bmod 23 = 8 = \mathbf{I}$,

$f^{-1}(T) = f^{-1}(18) = 68 \bmod 23 = 22 = \mathbf{Z}$, $\quad f^{-1}(E) = f^{-1}(4) = 12 \bmod 23 = 12 = \mathbf{N}$,

$f^{-1}(B) = f^{-1}(1) = 0 \bmod 23 = 0 = \mathbf{A}$, $\quad f^{-1}(S) = f^{-1}(17) = 64 \bmod 23 = 18 = \mathbf{T}$.

Mensagem original: **FELIZ NATAL**!

6. (a) Teremos que contar todos os números da forma

$$5 - - -, \quad -5 - -, \quad - - 5 -, \quad - - - 5$$

onde cada uma das três posições livres pode ser ocupada pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, sem ocorrer repetição de nenhum. Pelo princípio da multiplicação, podemos formar $P(8, 3)$ números de cada um destes quatro tipos. Portanto, pelo princípio da adição, podemos formar no total

$$P(8, 3) + P(8, 3) + P(8, 3) + P(8, 3) = 4 \times P(8, 3) = 4 \times 8 \times 7 \times 6$$

números.

Solução alternativa: Contemos primeiro os números de 4 algarismos distintos (não nulos) que não contêm o 5: pelo princípio da multiplicação, são precisamente $P(8, 4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5$. Como existem no total $P(9, 4) = 9 \times 8 \times 7 \times 6$ números de 4 algarismos distintos (não nulos) então o número requerido é, pelo princípio da adição, igual a

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 = (9 - 5) \times 8 \times 7 \times 6 = 4 \times 8 \times 7 \times 6.$$

(b) Teremos que contar os números nessas condições que estão

(1) entre 600 e 999:

$$\left.\begin{array}{ccc} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ 7 & \vdots & \vdots \\ 6 & 0 & 0 \\ - & - & - \end{array}\right\} \neq 1^{\underline{\text{o}}}$$

Pelo princípio da multiplicação são $4 \times 10 \times 9 = 360$ números.

(2) entre 560 e 599:

$$\left.\begin{array}{ccc} & 9 & 9 \\ & 8 & 8 \\ & 7 & \vdots \\ 5 & 6 & 0 \\ - & - & - \end{array}\right\} \neq 5$$

Pelo princípio da multiplicação são $1 \times 4 \times 9 = 36$ números.

(3) entre 556 e 559: São 4 números: 556, 557, 558, 559.

Em conclusão, pelo princípio da adição, são no total $360 + 36 + 4 = 400$ números.

7. (a) $C(11,3) = \dfrac{11!}{3!\,8!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3 = 165.$
$\overline{C}(4,8) = C(4+8-1,8) = C(11,8) = C(11,3) = 165.$

(b) Pela fórmula do Binómio de Newton,

$$(x+y)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} x^i y^{11-i}.$$

Então o coeficiente de x^3y^8 é igual a $\binom{11}{3} = C(11,3)$, que é 165 pela alínea anterior.

8. Devemos começar pelo mais difícil, escolher o conjunto das 45 posições na sequência onde vão ficar os espaços em branco: havendo 57 lugares disponíveis, temos $C(57,45)$ maneiras diferentes de escolher esse conjunto. Depois, nas 12 posições restantes colocamos os 12 símbolos. Isso significa permutar entre si os 12 símbolos pelas 12 posições: $P(12,12)$. Pelo princípio da multiplicação, existem assim

$$C(57,45) \times P(12,12) = \frac{57!}{45!\,12!} \times 12! = \frac{57!}{45!} = 57 \times 56 \times \cdots \times 46$$

mensagens distintas.

Solução alternativa: A solução acima ($\frac{57!}{45!} = P(57,12)$) sugere outra resolução: $P(57,12)$. Com efeito, ordenemos os 12 símbolos numa determinada ordem. Para construir uma mensagem, basta escolher as 12 posições ordenadas, entre as 57 disponíveis, onde vamos colocar esses símbolos pela ordem fixada.

Nota: Quem tenha interpretado (erradamente..., não é isso que está no enunciado!) que os símbolos podem ser eventualmente repetidos (ou seja, que as mensagens podem não ser "compostas por 12 símbolos distintos" mas sim ser compostas por alguns desses 12 símbolos distintos) a solução seria: havendo 57 lugares disponíveis, temos $C(57,45)$ maneiras diferentes de escolher o conjunto das 45 posições na sequência onde vão ficar os espaços em branco; nas restantes 12 posições colocamos os 12 símbolos de maneira ordenada, admitindo repetições, o que pode ser feito de $\overline{P}(12,12) = 12^{12}$. Logo, neste caso existem

$$C(57,45) \times \overline{P}(12,12) = \frac{57!}{45!\,12!} \times 12^{12} = \frac{57!}{45!11!} \times 12^{11}$$

mensagens distintas.