4. Contagem

4.1. Técnicas básicas e probabilidade discreta

Neste capítulo começaremos por abordar os dois princípios gerais, intuitivamente claros, que fundamentam os raciocínios básicos que se fazem na resolução de problemas elementares de contagem.

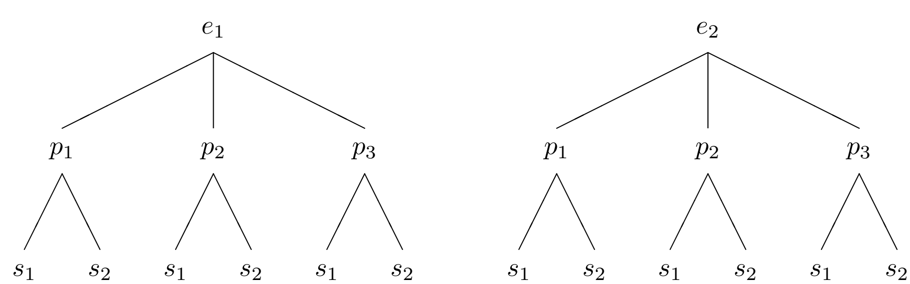
O princípio fundamental da contagem (chamado *princípio da multiplicação*) diz que se há p maneiras de fazer uma escolha E_1 e, feita a escolha E_1, há q maneiras de fazer a escolha E_2, então o número de maneiras de fazer sucessivamente as escolhas E_1 e E_2 é $p \times q$.

Mais geralmente:

> *Quando pretendemos realizar m escolhas múltiplas e existem p_1 possibilidades para a primeira escolha, p_2 possibilidades para a segunda escolha, etc., p_m possibilidades para a m-ésima escolha então se as escolhas forem combinadas livremente, o número total de possibilidades para o conjunto total das escolhas é igual a $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$.*

Exemplo. *O menu de um restaurante apresenta duas entradas, três pratos principais e duas sobremesas. Quantas ementas diferentes (com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa) podemos escolher?*

Num problema tão simples podemos esquematizar as várias possibilidades e contá-las; se designarmos por $E = \{e_1, e_2\}$ o conjunto das entradas, por $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ o conjunto dos pratos principais e por $S = \{s_1, s_2\}$ o conjunto das sobremesas, o seguinte quadro mostra os resultados possíveis:



Portanto, $2 \times 3 \times 2 = 12$ é a solução do problema. O quadro dá-nos também imediatamente a enumeração de todos os casos possíveis: $\{e_1, p_1, s_1\}, \{e_1, p_1, s_2\}, \ldots, \{e_2, p_3, s_2\}$.

A justificação para o Princípio da Multiplicação é a seguinte:

Fazer a escolha E_1 significa escolher um elemento de um conjunto S_1 de cardinal p_1, fazer a escolha E_2 significa escolher um elemento de um conjunto S_2 de cardinal p_2, e assim sucessivamente, pelo que fazer a escolha sucessiva $E_1, E_2, \cdots, E_m$ significa tomar um elemento do produto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$. Logo o número de maneiras de fazer tal escolha é igual ao cardinal $|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m|$. Portanto o Princípio da Multiplicação assenta no seguinte facto, facilmente demonstrável por indução:

Princípio da Multiplicação. *Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m$ conjuntos finitos e $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ o seu produto cartesiano. Então $|S| = |S_1| \times |S_2| \times \cdots \times |S_m|$.*

Por outro lado, é evidente que o número de maneiras diferentes de escolher uma entrada ou um prato principal ou uma sobremesa é igual a $2 + 3 + 2 = 7$. Este raciocínio é um caso particular do chamado Princípio da Adição:

Princípio da Adição. *Se $S_1, S_2, \ldots, S_m$ formarem uma partição de um conjunto finito S, ou seja, se $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$, então $|S| = \sum_{i=1}^{m} |S_i|$.*

Caso alguns dos subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_m$ tenham intersecção não vazia, um princípio mais geral (o chamado Princípio da Inclusão-Exclusão) será necessário para contar os elementos de S. Estudaremos esse princípio mais adiante. Os princípios da multiplicação e da adição podem ser facilmente demonstrados pelo Princípio de Indução Matemática.

Teste 1. *Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, amarela e vermelha. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantas maneiras se pode colorir a bandeira?*

Solução. Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 maneiras de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 maneiras de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. Portanto a resposta é $3 \times 2^6 = 192$.

Teste 2. *Quantos são os números de três algarismos distintos?*

Solução. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro e segundo algarismos. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Estes exemplos mostram-nos qual deve ser a estratégia para resolver problemas de contagem. Citando Elon Lages Lima[24]:

(1) *Postura.* Devemos sempre colocar-nos no papel da pessoa que deve fazer a acção solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No Teste 2, colocámo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três algarismos; no Teste 1, colocámo-nos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira.

(2) *Divisão.* Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos.

[24] *A matemática do ensino médio*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

(3) *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No Teste 2, a escolha do primeiro algarismo é uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro algarismo não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar; adiá-la só serve para causar problemas. Com efeito, começando a escolha dos algarismos pelo último, há 10 maneiras de escolher o último algarismo. Em seguida, há 9 maneiras de escolher o algarismo central, pois não podemos repetir o algarismo já usado. Agora temos um impasse: de quantas maneiras podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é "depende". Se antes não tivermos usado o zero, haverá 7 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o zero nem os dois algarismos já usados; se já tivermos usado o zero, haverá 8 maneiras de escolher o primeiro algarismo. Isto mostra como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

Teste. *Quantos são os números pares de três algarismos distintos?*

Solução. Há 5 maneiras de escolher o último algarismo. Note que começamos pelo último algarismo, que é o mais restrito; o último algarismo só pode ser 0,2,4,6 ou 8. Em seguida, vamos ao primeiro algarismo. De quantas maneiras se pode escolher este algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última posição; se já tivermos usado o 0, haverá 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira posição.

Este tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para ultrapassá-lo. O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há uma maneira de escolher o último algarismo, 9 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há assim $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0. Para os que não terminam em 0, há 4 maneiras de escolher o último algarismo, 8 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há pois $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0. A resposta final é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que tiver sido contado indevidamente. Em primeiro lugar fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira posição do número. Procedendo assim, há 5 maneiras de escolher o último algarismo (só pode ser 0,2,4,6, ou 8), 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo (não podemos repetir o algarismo usado na última casa) e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí incluídos os que começam por 0. Por fim vamos determinar quantos desses números começam por 0; são esses os números que foram contados indevidamente. Há só uma maneira de escolher o primeiro algarismo (tem que ser 0), 4 maneiras de escolher o último (só pode ser 2,4,6, ou 8 — lembre-se que os algarismos são distintos) e 8 maneiras de escolher o algarismo central (não podemos repetir os algarismos já usados). Há assim $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0. A resposta final é $360 - 32 = 328$.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três algarismos distintos, poderíamos calcular os números de três algarismos distintos menos os números ímpares de três algarismos distintos.

Para os números de três algarismos distintos, há 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo, 9 maneiras de escolher o segundo e 8 maneiras de escolher o último. Portanto há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três algarismos distintos.

Para os números ímpares de três algarismos distintos, há 5 maneiras de escolher o último algarismo, 8 maneiras de escolher o primeiro e 8 maneiras de escolher o algarismo central. Há pois $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três algarismos distintos.

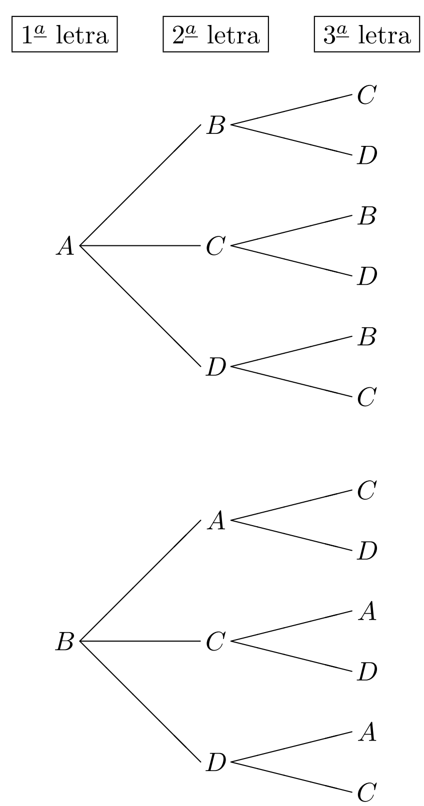
A resposta final é $648 - 320 = 328$.

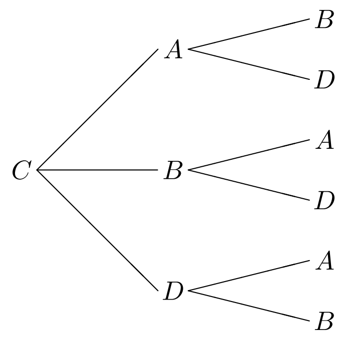
Alguns tipos de problemas de contagem, embora sejam aplicações do Princípio da Multiplicação, aparecem recorrentemente com muita frequência. Para esses problemas, vale a pena conhecer de cor fórmulas que forneçam imediatamente a resposta.

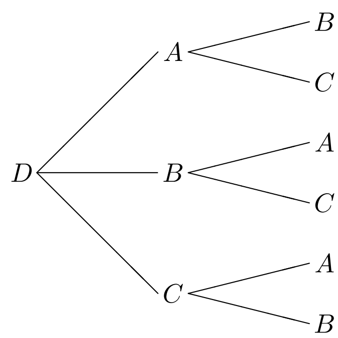
(1) *De um conjunto de 4 letras* $\{A, B, C, D\}$*, quantas sequências de 3 letras se podem formar se repetições de uma mesma letra não forem permitidas?*

(2) *Considere 4 pontos* A*,* B*,* C*,* D *num plano, tais que nenhum grupo de 3 esteja situado sobre uma mesma recta. Quantos triângulos diferentes podem ser construídos usando esses pontos como vértices?*

No primeiro problema temos $4 \times 3 \times 2$ hipóteses diferentes:







Note-se que neste caso a ordem pela qual se escrevem as letras na sequência é fundamental:

$$ABC \neq BAC \neq CAB.$$

No segundo problema já a ordem não interessará pois, por exemplo, as sequências de vértices

$$ABC,\ BAC,\ CAB$$

definem o mesmo triângulo (o que define um triângulo é o conjunto dos seus três vértices, e não a ordem pela qual os poderemos escrever).

Estes dois problemas revelam-nos duas estruturas diferentes, que ocorrem frequentemente, e que abordaremos de seguida, de uma maneira mais formal e sistemática.

Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. Uma *permutação dos n elementos de S, r a r* $(0 < r \leq n)$ é uma sequência **ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de elementos de S. Assumimos que não há repetição de elementos nas sequências ordenadas. Denotaremos o número de permutações dos n elementos de S, r a r, por $P(n, r)$. Se $r = n$ diremos simplesmente que se trata de *permutações de n elementos*.

No exemplo (1) acima pedia-se o cálculo de $P(4, 3)$, que vimos ser igual a 24. Seja $S = \{a, b, c\}$. As permutações dos 3 elementos de S, 2 a 2, são

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Logo $P(3, 2) = 6$. As permutações de 3 elementos são $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ e (c, b, a) pelo que $P(3, 3) = 6$.

É possível fazer estes cálculos no `Maple` com a ajuda da package `combinat`:

```
> with(combinat);
> numbperm(3, 2); numbperm(3, 3);
```

6
6

```
> permute([a, b, c],2);
```

$[[a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]$

Proposição 1. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$,*

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1).$$

Prova. O primeiro elemento da sequência ordenada pode ser escolhido de entre n elementos diferentes. O segundo de entre $n-1$, e assim sucessivamente, até ao elemento na r-ésima posição que poderá ser escolhido de entre $n-(r-1) = n-r+1$ elementos diferentes. Logo, pelo Princípio da Multiplicação, a construção da sequência pode ser realizada de

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

maneiras diferentes, ou seja, $P(n, r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$. □

Convencionando que $0! = 1$, podemos reescrever a Proposição 1 do seguinte modo:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (n \geq r > 0).$$

Esta fórmula continua válida para $r = 0$ se definirmos $P(n, 0)$ $(n \geq 0)$ como sendo igual a 1 (correspondendo à permutação vazia). O caso particular $r = n$ diz-nos que o número $P(n, n)$ de permutações de n elementos é igual a $n!$.

Seja S um conjunto com n elementos. Uma *combinação dos n elementos de S, r a r*, com $0 < r \leq n$, é um subconjunto de S com r elementos (distintos, evidentemente). Denotaremos o número de combinações de n elementos, r a r, por $C(n, r)$ ou $\binom{n}{r}$.

Exemplo. As combinações dos elementos de $S = \{a, b, c\}$, dois a dois, são $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$. Portanto $C(3, 2) = 3$. As combinações dos elementos de S três a três reduzem-se a $\{a, b, c\}$. Logo $C(3, 3) = 1$.

```
> with(combinat);
> numbcomb(3,2);
```

3

```
> choose([a,b,c], 2);
```

$$[[a, b], [a, c], [b, c]]$$

```
> choose([a,b,c], 3);
```

$$[[a, b, c]]$$

```
> choose([1,2,3,4,5], 3);
```

$$[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 3, 4], [1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 3, 5], [2, 4, 5], [3, 4, 5]]$$

Proposição 2. *Para quaisquer inteiros positivos n e r tais que $r \leq n$ temos*

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Prova. Seja S um conjunto com n elementos. Cada permutação dos elementos de S, r a r, pode ser obtido em 2 passos:

1. Seleccionando um subconjunto de S com r elementos;
2. Reordenando esses r elementos de modo a formar a permutação desejada.

Como $C(n, r)$ representa o número de subconjuntos de S com r elementos, podemos efectuar o passo 1 de $C(n, r)$ maneiras diferentes. Uma vez seleccionado um determinado subconjunto de r elementos, estes podem ser reordenados de $P(r, r) = r!$ maneiras diferentes. Atendendo ao Princípio da Multiplicação, concluímos que $P(n, r) = C(n, r) \times r!$, isto é,

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad \square$$

Note que $C(n, n) = 1$ e $C(n, 1) = n$. Convencionando que $C(n, 0) = 1$ para $n \geq 0$ a fórmula da Proposição 2 continua válida para $n \geq r = 0$.

A combinatória[25] e a teoria das probabilidades partilham raízes comuns e estão muito ligadas. De facto, o cálculo de uma *probabilidade discreta* (probabilidade de um acontecimento num espaço de resultados finito[26]) é um mero problema de contagem: numa experiência aleatória com um espaço $\mathcal{S}$ de resultados equiprováveis e finito, a *probabilidade* $p(A)$ de um acontecimento A é igual a $|A|/|\mathcal{S}|$, ou seja,

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{número dos resultados } \textbf{favoráveis} \text{ a } A}{\text{número total de resultados } \textbf{possíveis}}}$$

Basta então contar o número total de resultados possíveis e, de entre esses, quais são favoráveis à realização do acontecimento.

[25] Área da matemática que trata dos problemas de contagem.

[26] Uma *experiência aleatória* é um procedimento aleatório donde resulta um de entre vários resultados possíveis. O *espaço dos resultados* é o conjunto dos resultados *possíveis* da experiência. Um *acontecimento aleatório* é um subconjunto do espaço dos resultados, formado pelos elementos que são *favoráveis* à realização desse acontecimento.

Exemplo 1. *Existem várias lotarias, como o totoloto, que dão prémios avultados a pessoas que acertam correctamente em 6 números escolhidos entre os primeiros n inteiros positivos (habitualmente, n está entre 30 e 50). Qual é a probabilidade de uma pessoa ganhar o prémio no caso $n = 40$?*

Solução. Só existe uma combinação vencedora. O número total de resultados possíveis é igual ao número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto de 6 números entre os primeiros 40 inteiros positivos, ou seja, é igual a

$$C(40,6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3\,838\,380.$$

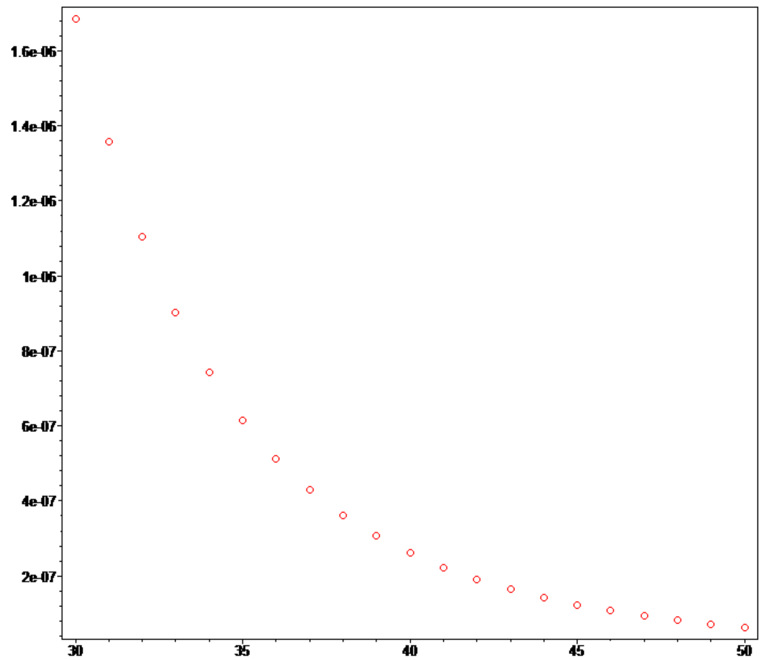
Consequentemente, a probabilidade de acertar na combinação vencedora é igual a

$$1/3\,838\,380 \sim 0.00000026.$$

Procedimento Maple para calcular essa probabilidade para todos os valores de n entre 30 e 50

```
> print(‘n, casos possiveis, probabilidade‘);
> for n from 30 to 50 do
>     n, numbcomb(n,6), evalf(1/numbcomb(n,6));
> od;
```

n	casos possíveis	probabilidade	n	casos possíveis	probabilidade
30	593775	0.168413961510^{-5}			
31	736281	0.135817710910^{-5}	41	4496388	0.222400735910^{-6}
32	906192	0.110351890110^{-5}	42	5245786	0.190629202210^{-6}
33	1107568	0.902879100910^{-6}	43	6096454	0.164029778610^{-6}
34	1344904	0.743547494810^{-6}	44	7059052	0.141662081510^{-6}
35	1623160	0.616082210010^{-6}	45	8145060	0.122773804010^{-6}
36	1947792	0.513401841710^{-6}	46	9366819	0.106759829610^{-6}
37	2324784	0.430147489010^{-6}	47	10737573	0.931309151510^{-7}
38	2760681	0.362229464410^{-6}	48	12271512	0.814895507610^{-7}
39	3262623	0.306501854510^{-6}	49	13983816	0.715112384210^{-7}
40	3838380	0.260526576310^{-6}	50	15890700	0.629298898110^{-7}



Exemplo 2. *Qual é a probabilidade que uma mão de cinco cartas no póquer contenha quatro cartas do mesmo tipo?*

Solução. Pela regra da multiplicação, o número de mãos de cinco cartas com quatro cartas do mesmo tipo é o produto do número de maneiras de escolher um tipo (de entre os 13 tipos de carta diferentes) pelo número de maneiras de escolher quatro cartas desse tipo de entre todas as cartas do baralho desse tipo (4 também) e pelo número de maneiras de escolher a quinta carta: $C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)$. Como existem, no total, $C(52,5)$ mãos diferentes de cinco cartas, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)}{C(52,5)} = \frac{13 \times 1 \times 48}{2\,598\,960} \sim 0.00024.$$

Exemplo 3. *Através de um informador, a polícia sabe o local de encontro de um grupo de malfeitores. A identidade dos diferentes elementos do grupo é, no entanto, desconhecida. A tarefa do inspector Costa é prender o chefe do grupo. O inspector sabe que o chefe do grupo é o mais baixo dos cinco elementos do grupo, todos eles de diferentes alturas, que estarão presentes na reunião. Terminada a reunião, os bandidos, como medida de precaução, deixam o edifício separadamente, com um intervalo de 15 minutos. Como o inspector não sabe qual deles é o mais baixo, decide deixar sair os dois primeiros bandidos, e prender o primeiro dos seguintes que seja mais baixo do que os que até esse momento saíram. Qual é a probabilidade do inspector Costa prender a pessoa certa?*

Solução. Designemos pelas letras a, b, c, d, c os cinco bandidos de modo que as respectivas alturas satisfaçam $alt(a) < alt(b) < alt(c < alt(d) < alt(e)$. O objectivo do inspector Loureiro é, portanto, prender o bandido a. A probabilidade de ele realizar tal evento é igual ao quociente do número de permutações *favoráveis* do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ (isto é, as permutações $x_1x_2x_3x_4x_5$ tais que o elemento de $\{x_3, x_4, x_5\}$ com menor índice que seja mais baixo do que x_1 e x_2 seja exactamente o bandido a) pelo número de permutações total (que é igual a $5! = 120$). Determinemos então o número de permutações favoráveis:

Claro que nenhuma permutação na qual a aparece na 1^a ou 2^a posições é favorável. Aquelas em que a aparece na 3^a posição são todas favoráveis e são em número de $4! = 24$. Contemos agora as permutações favoráveis nas quais a aparece na 4^a posição: as 6 nas quais b está na 1^a posição são favoráveis; analogamente as 6 nas quais b está na 2^a posição são também favoráveis; nenhuma das que b aparece na 3^a posição é favorável; das que b aparece na 5^a posição somente 4 são favoráveis (*cdcab*, *dceab*, *ccdab*, *ecdab*). Portanto ao todo temos 16 permutações favoráveis nas quais a esta na 4^a posição.
Finalmente contemos as permutações favoráveis nas quais a aparece na 5^a posição: obviamente são aquelas em que b aparece na 1^a ou 2^a posições; portanto, são $3\times 2+3\times 2 = 12$ permutações. Em conclusão, o número de permutações favoráveis é igual a $24 + 16 + 12 = 52$ e, consequentemente, a probabilidade do inspector Loureiro apanhar o chefe do bando é igual a $\frac{52}{120} \sim 0,433333$.

Os números $\binom{n}{r} = C(n, r)$ chamam-se números (ou coeficientes) binomiais (por razões que serão evidentes mais adiante) e têm muitas propriedades importantes (e fascinantes!). Em fórmulas que aparecem na análise de algoritmos, em problemas de probabilidades, etc., estes números ocorrem variadas vezes, revelando-se uma necessidade saber manipulá-los.

Da Proposição 2 conclui-se imediatamente:

Corolário 3. *Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \le r \le n$ tem-se $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.* □

Fórmula de Pascal. *Para quaisquer inteiros n e r tais que $0 \le r \le n-1$ tem-se*

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

□

Utilizando a Fórmula de Pascal e observando que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, podemos imediatamente calcular os números $\binom{n}{r}$ para $0 \le r \le n$, sem necessitar de utilizar a Proposição 2. Dispondo esses números do seguinte modo

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

obtemos o chamado *Triângulo de Pascal*.

Procedimento Maple que calcula as primeiras 9 linhas do Triângulo de Pascal

```
> for n from 1 to 9 do
>   seq(binomial(n,k),k=0..n);
> od;
```

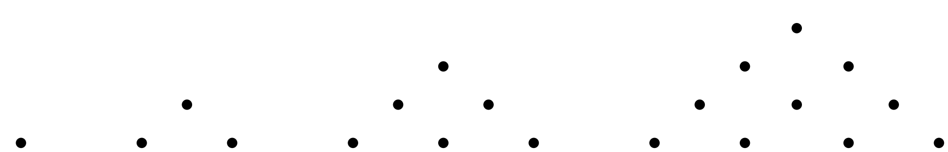
```
                1, 1
              1, 2, 1
            1, 3, 3, 1
          1, 4, 6, 4, 1
        1, 5, 10, 10, 5, 1
      1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
    1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
  1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
```

Muitas das relações envolvendo coeficientes binomiais podem ser descobertas através da simples observação do Triângulo de Pascal. Por exemplo:

1. Se adicionarmos os elementos em cada linha n obtemos o valor 2^n, ou seja,
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$
Sendo S um conjunto com n elementos, como $\binom{n}{r}$ é o número de subconjuntos de S com r elementos, então podemos concluir que o número de subconjuntos de S é igual a 2^n.

2. Facilmente se observa, pela simetria em cada linha, que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (Corolário 3).

3. Na terceira coluna aparecem os chamados *números triangulares*, correspondentes ao número de pontos das seguintes figuras triangulares:



1 3 6 10

A validade destas identidades pode depois ser facilmente verificada utilizando o Princípio de Indução Matemática.

Teorema Binomial (ou Fórmula do Binómio de Newton[27]). *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

Prova. Não é difícil provar o Teorema Binomial por indução matemática. No entanto, a seguinte prova, puramente combinatorial, é mais curta e elegante:

Quando efectuamos a multiplicação $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ até não restarem mais parênteses, cada um dos factores $(x+y)$ contribui com um x ou um y para cada parcela. Resultam portanto 2^n parcelas e cada uma delas pode ser escrita na forma $x^r y^{n-r}$ para algum $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Obtemos a parcela $x^r y^{n-r}$ precisamente quando escolhemos x em r dos factores e y nos restantes $n-r$. Então o número de vezes que a parcela $x^r y^{n-r}$ ocorre na expansão é igual ao número de maneiras diferentes de seleccionar r dos n factores $(x+y)$, ou seja, ao número $\binom{n}{r}$ de combinações de n elementos r a r. □

Procedimento para expansão do Binómio de Newton

```
> for n from 1 to 7 do
>    sort(expand((x+y)^n));
> od;
```

$x + y$
$x^2 + 2xy + y$
$x^3 + 3xy + 3xy + y^3$
$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
$x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

O Teorema Binomial justifica a designação de coeficientes binomiais para os números $\binom{n}{r}$: estes números são precisamente os coeficientes da expansão do Binómio de Newton. Note que a fórmula do binómio ainda é válida para $n = 0$.

Do Binómio de Newton podemos obter, como casos particulares, algumas identidades úteis. Por exemplo:

Para $x = 1$ e $y = 1$,

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \text{ , para } n \geq 0.$$

Para $y = 1$,

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r \text{ , para } n \geq 0.$$

[27] O Teorema Binomial dá-nos uma fórmula para o desenvolvimento de $(x+y)^n$ com $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Em 1676, Newton generalizou-o, obtendo um desenvolvimento para $(x+y)^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Para se obter esta forma é necessário estender o domínio de definição dos números binomiais $\binom{n}{r}$, permitindo que $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Z}$. Neste caso geral o desenvolvimento torna-se uma série infinita e consequentemente algumas questões de convergência se levantam, por isso não vamos sequer enunciar esse resultado.

Para $x = -1$ e $y = 1$,

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \text{, para } n \geq 1.$$

Em resumo, temos à disposição vários métodos que podemos usar para obter identidades envolvendo os números binomiais:

(1) Definição;

(2) Indução matemática;

(3) Triângulo de Pascal;

(4) Fórmula de Pascal;

(5) Argumentos combinatoriais;

(6) Teorema Binomial.

Apêndice: O Princípio dos Pombais

Há um outro princípio combinatorial básico muito intuitivo que, apesar de elementar, permite a resolução de muitos problemas (de existência de determinadas configurações), alguns surpreendentes e difíceis.

Princípio dos Pombais. *Se $n+1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com dois ou mais objectos.*

Prova. Faremos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que em cada caixa ficava, no máximo, um objecto. Então o número de objectos seria no máximo n, o que contradiz a hipótese. Portanto alguma caixa conterá, pelo menos, dois objectos. □

Formulado em termos de pombos este princípio diz que se n pombos voarem para $n-1$ pombais, necessariamente um pombal será ocupado por dois ou mais pombos. Por exemplo, no caso de 13 pombos e 12 pombais,

	$\oint\ \oint\ \oint$	$\oint$
$\oint$		$\oint$
$\oint\ \oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$

$\oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint\ \oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint$

$\oint\ \oint\ \oint$		$\oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint\ \oint$
$\oint$	$\oint$	$\oint\ \oint$
$\oint$		

são algumas configurações possíveis.

Solução do Problema (A2).[28] Escolhendo 101 inteiros entre os inteiros $1, 2, \ldots, 200$, vamos aplicar o Princípio dos Pombais para mostrar que entre os inteiros escolhidos existem dois tais que um é divisor do outro.

Qualquer inteiro pode ser escrito na forma $2^k a$, com $k \in \mathbb{N}_0$ e a ímpar. Para qualquer inteiro entre 1 e 200, a é um dos números $1, 3, 5, \ldots, 199$. Logo, entre os 101 escolhidos, dois são da forma $2^{k_1}a_1$ e $2^{k_2}a_2$ com $a_1 = a_2$. Se $k_1 \leq k_2$ então $2^{k_1}a_1$ é divisor de $2^{k_2}a_2$. Caso $k_1 > k_2$, $2^{k_2}a_2$ é divisor de $2^{k_1}a_1$. □

Vamos agora apresentar uma forma mais geral do Princípio dos Pombais.

Proposição 4. *Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ inteiros positivos. Se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com p_i ou mais objectos, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

[28] No capítulo *Que é a Matemática Discreta?*

Prova. Suponhamos por absurdo que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a i-ésima caixa ficava com, no máximo, $p_i - 1$ elementos. Então o número total de objectos não excederia

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \cdots + (p_n - 1) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n,$$

o que é absurdo. Logo existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que a i-ésima caixa conterá pelo menos p_i objectos. □

Observações. (1) Se $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 2$ obtemos o Princípio dos Pombais.
(2) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que

> "*se $n(r-1)+1$ objectos forem colocados em n caixas, pelo menos uma das caixas ficará com r ou mais objectos*".

Por exemplo, no problema (A1), como o número de caixas é igual ao número de notas possíveis, ou seja, 201, podemos assegurar que se comparecerem $201(r-1)+1 = 201r - 200$ alunos ao exame, r de entre eles terão a mesma nota.

Solução do Problema (A3).[29] Provemos, utilizando a Observação (2), que de uma sequência $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ de números reais é possível extrair uma subsequência crescente ou decrescente com $n+1$ elementos.

Suponhamos que não existe nenhuma subsequência crescente com $n+1$ elementos. Para $k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$ seja m_k o número de elementos da maior subsequência crescente que começa em a_k. É evidente que, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$, $m_k \geq 1$ e $m_k \leq n$. Temos então n^2+1 inteiros, $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$, entre 1 e n. Como $n(r-1)+1 = n^2+1$ para $r = n+1$, podemos concluir que $n+1$ desses inteiros são iguais entre si. Sejam eles

$$m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_{n+1}},$$

onde

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2+1.$$

Se existisse algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$, seria possível construir uma subsequência crescente começando em a_{k_i} com $m_{k_{i+1}}+1$ elementos, o que é absurdo uma vez que $m_{k_i} = m_{k_{i+1}}$. Consequentemente,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_{n+1}},$$

isto é,

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$$

é uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos.

Mostrámos assim que existe uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente com $n+1$ elementos. □

Em particular, nos primeiros 101 números naturais, dispostos por qualquer ordem, será sempre possível encontrar 11 números que formam ou uma sequência crescente ou uma sequência

[29] Difícil!

decrescente. Isto já não acontece se tomarmos apenas os primeiros 100 números naturais. Como se poderá ordenar esses números de forma a não ser possível encontrar a desejada sequência de 11 elementos? Bastará começar com 91, 92, 93 até 100, depois 81, 82, 83 até 90 e assim sucessivamente:

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4.2. Técnicas avançadas de contagem

Permutações e combinações com repetição

Podemos complicar um pouco o cálculo de permutações ou combinações se admitirmos repetição de elementos. Como o cálculo destas estruturas aparece em muitos problemas práticos será importante encontrarmos fórmulas que nos dêem a solução em cada um dos casos.

Seja então S um conjunto com n elementos. Consideremos as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ com elementos em S, eventualmente não todos distintos. Designemos estas sequências por *permutações com repetição de elementos de S, r a r*. Se admitirmos que cada elemento de S se pode repetir, como componente das permutações com repetição, tantas vezes quantas quisermos, temos:

Teorema 1. *O número destas permutações, que denotaremos por $\overline{P}(n, r)$, é igual a n^r.*

Prova. Ao construirmos cada permutação com repetição $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ temos n hipóteses de escolha do primeiro elemento a_1 e o mesmo número de hipóteses de escolha dos restantes elementos. Portanto, no total conseguimos construir

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r \text{ vezes}} = n^r$$

permutações diferentes. □

Exemplos. (1) Se quisermos ter a certeza de obter 13 resultados certos no totobola teremos de preencher $\overline{P}(3, 13) = 3^{13}$ colunas.
(2) Observámos anteriormente que o número de subconjuntos de um conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é igual a 2^n. Podemos concluir isso de outro modo: se a cada subconjunto S' de S fizermos corresponder uma sequência $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ de comprimento n, definida por

$$a'_i = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i \in S \\ \\ 0 \text{ se } a_i \notin S \end{cases}$$

concluímos que o número de subconjuntos de S é dado por $\overline{P}(2, n) = 2^n$.

Teste. *Qual é a probabilidade $p(n)$ de, entre n pessoas, existirem pelo menos duas que façam anos no mesmo dia?*

Solução. Admitiremos só como datas possíveis de nascimento os 365 dias de um ano não bissexto. Calculemos a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de todas as pessoas fazerem anos em dias diferentes. O número de casos possíveis é igual a $\overline{P}(365, n)$, uma vez que cada caso é uma sequência de n elementos, que se podem repetir, escolhidos entre os 365 dias. O número de casos favoráveis é igual a $P(365, n)$ pois cada caso favorável é uma sequência de n elementos, sem repetição, escolhidos entre os 365 dias. A probabilidade $p(n)$ é então dada por

$$1 - \frac{P(365, n)}{\overline{P}(365, n)} = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Alguns valores particulares de p: $p(5) = .0713557370$, $p(10) = .1169481777$, $p(15) = .2529013198$, $p(20) = .4114383836$, $p(25) = .5686997040$ e $p(30) = .7063162427$.

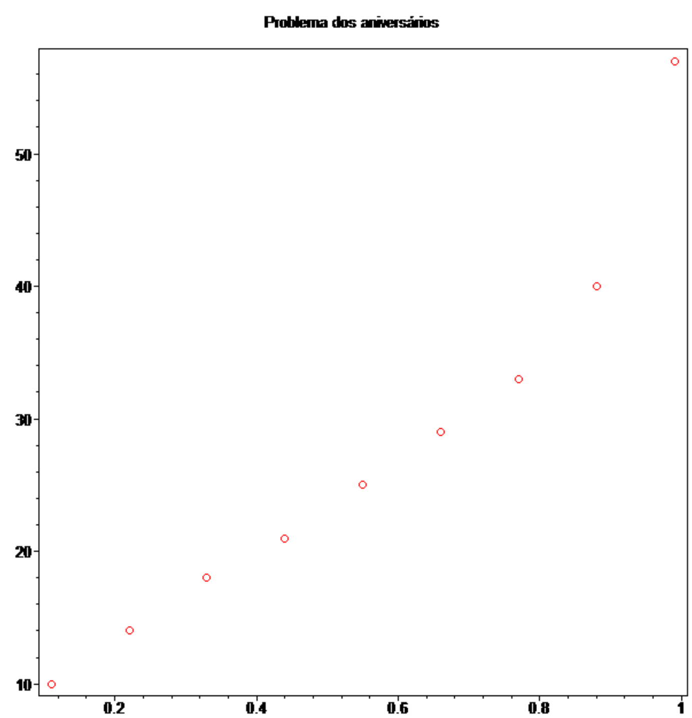
Qual é o menor valor de n para o qual $p(n) \geq 0.5$? e para o qual $p(n) \geq 0.99$? O seguinte procedimento em `Maple` calcula esses limites inferiores:

```
> with(combinat);
> Aniversarios := proc(percentagem::float)
>    local num_pessoas, prob;
>    # Inicializa
>    prob := 0; num_pessoas := 0;
>    # Efectua ciclo ate ao numero suficiente de pessoas
>    while prob < percentagem do
>       num_pessoas := num_pessoas +1;
>       prob := 1-(numbperm(365,num_pessoas) / 365^num_pessoas);
>    od;
>    RETURN(num_pessoas);
> end;
>
> Aniversarios(.5); Aniversarios(.99);
```

23, 57

Este é o chamado *problema dos aniversários*, muito conhecido pois a resposta parece, à primeira vista, um pouco surpreendente: não é preciso um n muito grande para a probabilidade ser maior que 0.99, basta $n \geq 57$.

```
Aniversarios(.11)=10
Aniversarios(.22)=14
Aniversarios(.33)=18
Aniversarios(.44)=21
Aniversarios(.55)=25
Aniversarios(.66)=29
Aniversarios(.77)=33
Aniversarios(.88)=40
Aniversarios(.99)=57
```



Designemos por *multi-conjunto* uma estrutura similar à de um conjunto mas com a diferença de os seus elementos não terem forçosamente que ser distintos. Por exemplo, $M = \{a, a, b, b, b, c\}$ é um multi-conjunto com 6 elementos: 2 a's, 3 b's, 1 c. Costuma indicar-se um multi-conjunto especificando o número de ocorrências de cada elemento. Portanto o multi-conjunto M também se denota por $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, c\}$. Chamaremos *combinação com repetição dos elementos de S, r a r*, aos multi-conjuntos de r elementos de S.

Teorema 2. *O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, que designaremos por $\overline{C}(n,r)$, é igual a $C(n-1+r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!}$.*

Prova. Podemos demonstrar este resultado utilizando somente argumentos combinatórios. De facto, cada combinação com repetição de n elementos r a r pode ser representada por uma sequência de $n-1$ barras e r asteriscos, do seguinte modo: as barras são utilizadas para demarcar em n células os n diferentes elementos de S, com a i-ésima célula contendo um asterisco sempre que o i-ésimo elemento de S ocorre na combinação. Por exemplo, para $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

Multi-conjunto	Representação
$\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	$**\,|\,*\,|\,|\,***$
$\{a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, a_3\}$	$|\,**\,|\,****\,|$

Assim o número de combinações com repetição de n elementos r a r coincide com o número de sequências contendo $n-1$ barras e r asteriscos. O número de tais sequências é igual a $C(n-1+r, r)$, uma vez que cada sequência corresponde a uma escolha de r posições (das $n-1+r$ posições disponíveis) para colocar os r asteriscos (após a escolha das posições onde vão ficar os asteriscos, as barras ficam forçosamente nas posições restantes). □

Demonstrámos este teorema utilizando somente argumentos combinatórios. Aliás, a solução de problemas combinatórios requere geralmente o uso de métodos *ad hoc*; deve-se estudar a situação, desenvolver algum raciocínio e usar a própria intuição para encontrar a solução do problema. Isto não quer dizer que não existam princípios ou métodos que possam ser aplicados. Com efeito, já estudámos alguns. Mas todos eles requerem inteligência para se saber quando e como aplicá-los e, sobretudo, experiência (que naturalmente só se adquire resolvendo problemas).

Em resumo:

Tipo	**Repetição permitida?**	**Fórmula**
Permutações $P(n,r)$	Não	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
Combinações $C(n,r)$	Não	$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
Permutações $\overline{P}(n,r)$	Sim	n^r
Combinações $\overline{C}(n,r)$	Sim	$\dfrac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!}$

Exemplos. (1) O número de sequências crescentes (em sentido lato) com r componentes, escolhidas no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, é igual a $C(n + r - 1, r)$.
(2) O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0)$, é igual a

$$\overline{C}(3, 11) = C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = 78.$$

Mais geralmente, $\overline{C}(n, r)$ é igual ao número de soluções inteiras (não negativas) da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. De facto, qualquer combinação com repetição de elementos de $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, r a r, contém, para cada i, p_i elementos iguais a a_i, e $\sum_{i=1}^{n} p_i = r$; por outro lado, é evidente que a cada conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de inteiros positivos ou nulos, com $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = r$, podemos fazer corresponder a combinação com repetição de elementos de S, r a r,

$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{p_1 \text{ vezes}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{p_2 \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{p_n \text{ vezes}}\}.$$

Assim, as equações $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 8$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 5$ têm o mesmo número de soluções inteiras não negativas pois

$$\overline{C}(6, 8) = C(13, 8) = \frac{13!}{8!\,5!} = 1287$$

e

$$\overline{C}(9, 5) = C(13, 5) = C(13, 8) = 1287.$$

(3) Qual é o valor de k depois do seguinte algoritmo ter sido executado?

```
k := 0
for i1 := 1 to n
   for i2 := 1 to i1
      for i3 := 1 to i2
         ⋮
            for ir := 1 to ir−1
               k := k + 1
```

Observemos que o valor inicial de k é 0 e que uma unidade é adicionada a k de cada vez que o *ciclo* é atravessado com um conjunto de inteiros $i_1, i_2, \ldots, i_r$ tais que

$$1 \leq i_r \leq i_{r-1} \leq \cdots \leq i_2 \leq i_1 \leq n.$$

O número de tais conjuntos de inteiros é igual ao número de maneiras de escolher r inteiros de $\{1, 2, \ldots, n\}$, ordenados por ordem crescente, com repetição permitida, ou seja, é igual a $\overline{C}(n, r) = C(n + r - 1, r)$.

Confirmemos isso no `Maple`, no caso $r = 5$:

```
> alg:=proc(n::integer)
> local k,i1,i2,i3,i4,i5;
>    k := 0;
```

```
>    for i1 from 1 to n do
>       for i2 from 1 to i1 do
>          for i3 from 1 to i2 do
>             for i4 from 1 to i3 do
>                for i5 from 1 to i4 do
>                    k := k+1;
>                od;
>             od;
>          od;
>       od;
>    od;
>    RETURN(k);
> end;
>
> alg(10); alg(5);
```

2002
126

Portanto, `alg(n)` representa o valor de k depois de algoritmo ter sido executado, e deverá coincidir com $\overline{C}(n,5) = C(n+5-1,5) = C(n+4,5)$.

```
> binomial(10+4,5); binomial(5+4,5);
```

2002
126

Podemos impôr algumas restrições à repetição dos elementos nas combinações e permutações:

Corolário 1. *Seja S um conjunto com n elementos. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r ($r \geq n$), contendo todos os elementos de S (cada um pelo menos uma vez) é igual a $C(r-1,n-1)$.*

Prova. Cada multi-conjunto conterá n elementos distintos de S, podendo os $r-n$ restantes serem elementos quaisquer de S. Consequentemente, o número a contar é igual a

$$\overline{C}(n,r-n) = C(n+r-n-1,r-n) = C(r-1,r-n) = C(r-1,r-1-r+n) = C(r-1,n-1).$$

□

Mais geralmente, tem-se:

Corolário 2. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de combinações com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a $C(n+r-r_1-\cdots-r_n-1, r-r_1-\cdots-r_n)$.*

Prova. Em cada multi-conjunto haverá r_i elementos iguais a a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podendo os restantes $r - r_1 - \cdots - r_n$ serem elementos quaisquer de S. Portanto, o número de combinações requerido é igual a

$$\overline{C}(n, r - r_1 - \cdots - r_n) = C(n + r - r_1 - \cdots - r_n - 1, r - r_1 - \cdots - r_n).$$

□

E o número das respectivas permutações? Aqui aparecem os números

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!},$$

onde $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ são tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Estes números designam-se por *números (ou coeficientes) multinomiais*, e denotam-se habitualmente por

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad \text{ou} \quad \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Estes números generalizam os coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \frac{n!}{n_1!\, (n - n_1)!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Teorema 3. *Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de permutações com repetição de elementos de S, r a r, contendo cada elemento a_i pelo menos r_i vezes ($r \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), é igual a*

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}.$$

(O somatório é tomado sobre todos os $s_i \geq r_i$ tais que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = r$.)

Prova. Basta observar que o número dessas permutações é, pelo Princípio da Multiplicação, igual a

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=r;\, s_i \geq r_i} C(r, s_1) \times C(r - s_1, s_2) \times C(r - s_1 - s_2, s_3) \times \cdots \times C(\underbrace{r - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1}}_{s_n}, s_n).$$

Mas este número é igual a

$$\frac{r!}{s_1!\, (r - s_1)!} \times \frac{(r - s_1)!}{s_2!\, (r - s_1 - s_2)!} \times \frac{(r - s_1 - s_2)!}{s_3!\, (r - s_1 - s_2 - s_3)!} \times \cdots \times \frac{(r - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1})!}{s_n!\, (\underbrace{r - s_1 - s_2 - \cdots - s_n}_{=0})!} =$$

$$= \frac{r!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} = \binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_n}.$$

□

É claro que podemos também impôr condições ao número máximo de vezes que cada elemento pode ser repetido nas combinações e permutações. Aqui as fórmulas são um pouco mais complicadas e não as apresentaremos.

Observação. Tal como os números binomiais aparecem no desenvolvimento do binómio, os números multinomiais
$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$
são precisamente os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$. Por exemplo:

```
> combinat[multinomial](4,0,0,4); combinat[multinomial](4,0,1,3);
> combinat[multinomial](4,0,2,2); combinat[multinomial](4,1,1,2);
```

$1, 4, 6, 12$

```
> for n from 1 to 4 do
>    sort(expand((x + y + z)^n));
> od;
```

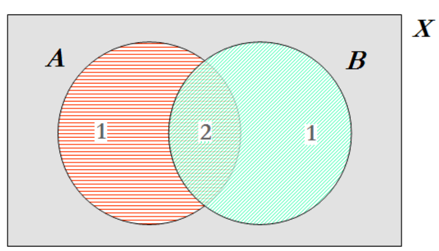
$x + y + z$
$x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$
$x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$
$x^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 + 12x^2yz + 6x^2z^2 + 4xy^3 + 12xy^2z + 12xyz^2 + 4xz^3 + y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$

Princípio da Inclusão-Exclusão

O Princípio da Inclusão-Exclusão que vamos agora apresentar é também conhecido por *fórmula do crivo* ou *fórmula de da Silva-Sylvester*[30] e generaliza o Princípio da Adição.

Se A e B forem dois subconjuntos de X qual será o número de elementos da união $A \cup B$? Se somarmos simplesmente o número de elementos de A com o número de elementos de B estaremos a contar, uma vez cada um, os elementos de $A - B$ e os de $B - A$, mas estaremos a contar por duas vezes os elementos da intersecção $A \cap B$ (é o que o número 2 indica na região $A \cap B$ na figura):

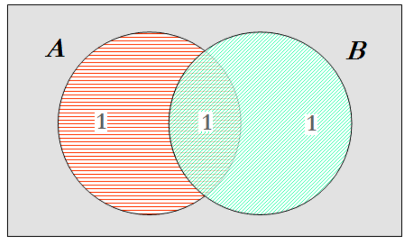
$|A| + |B|$:



[30] O Princípio da Inclusão-Exclusão foi publicado pela primeira vez em 1854, num artigo de Daniel da Silva, e mais tarde, em 1883, por Sylvester. Por isso, a fórmula do crivo e suas similares são, por vezes, apelidadas de fórmulas de da Silva ou de Sylvester. Realçamos o facto de Daniel da Silva, na opinião de Gomes Teixeira o mais notável matemático português do séc. XIX, ter sido estudante da Universidade de Coimbra; transcrevemos de [J. Silva Oliveira, *Daniel Augusto da Silva*, Boletim da SPM 2 (1979) 3-15]: "Daniel da Silva (1814-1878) foi, além de matemático eminente do seu tempo, oficial da Armada e professor da Escola Naval. Como estudante frequentou primeiro a Academia Real de Marinha e prosseguiu depois os seus estudos na Universidade de Coimbra onde, com altas classificações, se licenciou em Matemática e acabou por se doutorar".

Teremos então que descontar esses elementos:

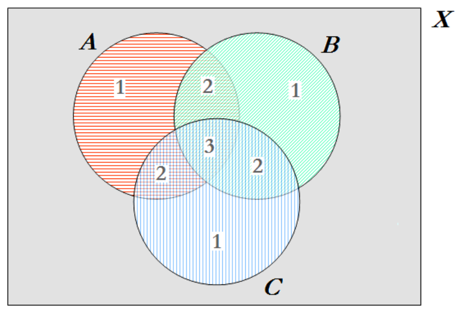
$|A| + |B| - |A \cap B|$:



Em conclusão, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ e, consequentemente, o complementar $X - (A \cup B)$ tem cardinal igual a $|X| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$.

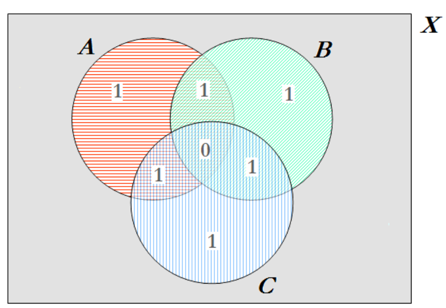
E se forem 3 subconjuntos A, B e C em vez de 2? Neste caso poderemos começar por somar os elementos em A, B e C.

$|A| + |B| + |C|$:



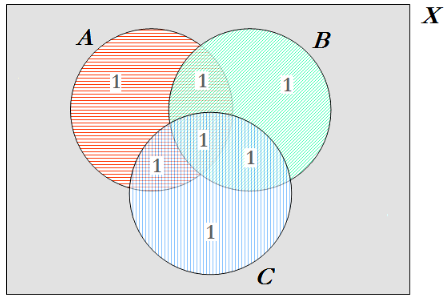
Deste modo estaremos a contar, uma vez cada um, os elementos de $A - (B \cup C)$, os de $B - (A \cup C)$ e os de $C - (A \cup B)$, mas estaremos a contar por duas vezes os elementos de $(A \cap B) - C$, $(A \cap C) - B$ e $(B \cap C) - A$, e, pior ainda, estaremos a contar por três vezes os elementos da intersecção $A \cap B \cap C$. Podemos começar por descontar os primeiros adicionando $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$.

$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$:



Mas agora acabámos por descontar os elementos da intersecção $A \cap B \cap C$ mais do que devíamos (o zero na figura acima indica que os elementos dessa região ainda não foram considerados para a contagem dos elementos de $A \cup B \cup C$), tendo que os contar novamente, para que a contagem fique certa.

$|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$:



Agora, finalmente, todos os elementos de todas as regiões de $A \cup B \cup C$ foram contados precisamente uma vez.

Estamos em condições de analisar o caso geral de n subconjuntos. No que se segue, assumiremos que X é um conjunto finito e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são n propriedades que cada elemento de X poderá ou não possuir. Denotaremos por A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o conjunto dos elementos de X que possuem a propriedade P_i, e por $\overline{A_i}$ o respectivo complementar $X - A_i$.

Princípio da Inclusão-Exclusão. *O número $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ de elementos de X que possuem, pelo menos, uma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é igual a*

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,$$

onde o primeiro somatório percorre todos os inteiros $1, 2, \ldots, n$, o segundo somatório percorre todas as combinações $\{i, j\}$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, dois a dois, o terceiro somatório percorre todas as combinações $\{i, j, k\}$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, três a três, e assim sucessivamente.

Prova. É evidente que o conjunto dos elementos de X que possuem alguma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é a união $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Podemos verificar a validade da identidade a provar mostrando que um objecto com alguma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com uma unidade para a soma do enunciado do princípio e que um objecto que não verifique nenhuma dessas propriedades contribui com um zero para essa mesma soma.

Designemos esta soma por M. Cada elemento de X que não possui nenhuma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ contribui com

$$0 - 0 + 0 - \cdots + (-1)^{n+1} \times 0 = 0$$

unidades para o valor M, pois não pertence a nenhum A_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Por outro lado, cada elemento de X que possui m ($1 \leq m \leq n$) das n propriedades contribui com $C(m, 1) = m$ unidades para $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ (pois pertence a m dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$), com $C(m, 2)$ unidades para $\sum_{i,j=1;i<j}^{n} |A_i \cap A_j|$ (pois existem $C(m, 2)$ maneiras diferentes de escolher um par de propriedades distintas que ele satisfaça) e assim sucessivamente. Então a sua contribuição para M é igual a

$$C(m, 1) - C(m, 2) + C(m, 3) - \cdots - (-1)^m C(m, m)$$

que, por sua vez, é igual a $C(m,0)=1$, pois por uma fórmula deduzida na secção anterior [31],

$$C(m,0)-C(m,1)+C(m,2)-C(m,3)+\cdots+(-1)^{m+1}C(m,m)=0. \qquad \square$$

Por vezes, a seguinte formulação alternativa do Princípio da Inclusão-Exclusão é mais útil:

Corolário. *O número $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$ de elementos de X que não possuem qualquer das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é dado por*

$$|X|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|-\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

Prova. É claro que o número de elementos de elementos de X que não verificam nenhuma das propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é o cardinal de $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}=X-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão esse número é igual a

$$|X|-\Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\Big)$$

$$=|X|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}|A_i\cap A_j|-\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

$\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicação do Princípio da Inclusão-Exclusão. Comecemos por recordar o Problema (B3) do texto introductório do curso"O que é a Matemática Discreta?":

> *À saída de um restaurante, de quantas maneiras podem ser devolvidos os chapéus de n pessoas de modo a que nenhuma pessoa receba o seu chapéu?*[32]

Este problema é um caso particular do seguinte problema geral, designado por **problema dos desencontros**:

> *Estando os elementos de um conjunto finito S dispostos segundo uma certa ordem, quantas permutações de S existem nas quais nenhum elemento esteja na sua posição primitiva?*

Uma permutação $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_n}$ de $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ diz-se um *desencontro* de S caso $j_k\neq k$ para qualquer $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Denotemos por D_n o número de desencontros de S.

[31] Terceira identidade binomial na página 93.

[32] Também costuma aparecer enunciado do seguinte modo, na forma de um jogo de cartas: "No chamado 'jogo dos pares', as 52 cartas de um baralho são dispostas em linha, com o seu valor à vista. As cartas de um segundo baralho são dispostas também em linha por cima das outras. A pontuação é determinada contando o número de vezes em que a carta do segundo baralho coincide com a do primeiro sobre a qual foi colocada. Qual é a probabilidade de se obterem zero pontos?"

Solução do problema. *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big)$.

Prova. Seja X o conjunto de todas as permutações de S. Claro que $|X| = n!$. Seja ainda A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) o conjunto das permutações $a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ tais que $a_{j_i} = a_i$ (portanto aquelas em que a_i está na posição primitiva). Claro que $|A_i| = (n-1)!$. As permutações em $A_i \cap A_j$ têm a_i e a_j fixos, nas posições i e j respectivamente, e os restantes $n-2$ elementos permutados nas restantes $n-2$ posições, pelo que $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$. Analogamente, podemos concluir que $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Como $D_n = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$, decorre pelo Princípio da Inclusão-Exclusão que

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big). \end{aligned}$$ □

Cálculo de $D_2, D_3, \ldots, D_{15}$:

```
> Des := proc(n::integer)
>    local k;
>    RETURN(sum((-1)^k  * (n!/k!), k=0..n));
> end;
>
> seq(Des(i),i=2..15);
```

1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734

Na sua forma original o problema (B3) foi formulado em termos de probabilidades, questionando a probabilidade de nenhuma pessoa receber de volta o respectivo chapéu. Evidentemente, a resposta é a probabilidade de uma permutação de n objectos, escolhida aleatoriamente, ser um desencontro, ou seja,

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

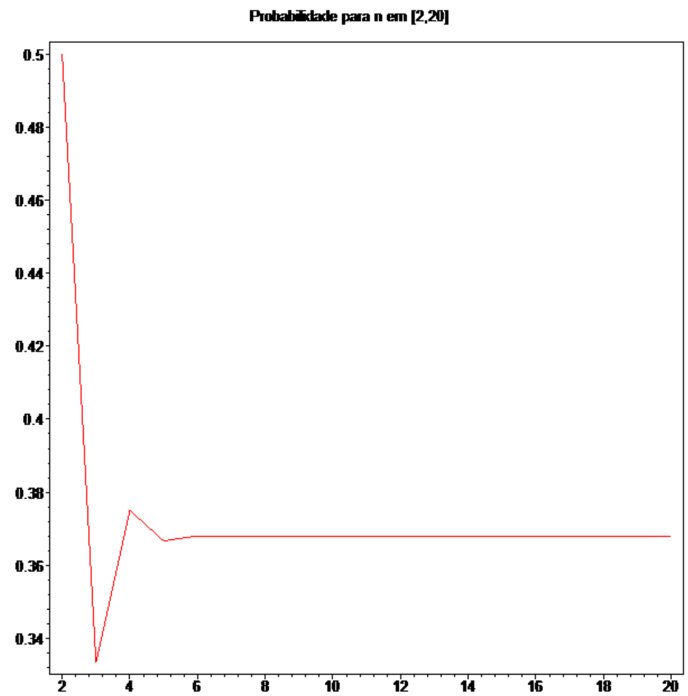
Cálculo desta probabilidade para alguns valores particulares de n:[33]

```
> Digits := 20;
> for i from 2 to 10 do
>    evalf(Des(i)/i!);
> od;
```

[33] Usando factos da Análise Matemática é possível provar que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= e^{-1} \sim 0.3679. \end{aligned}$$

```
n,  probabilidade
2,  0.50000000000000000000
3,  0.33333333333333333333
4,  0.37500000000000000000
5,  0.36666666666666666667
6,  0.36805555555555555556
7,  0.36785714285714285714
8,  0.36788194444444444444
9,  0.36787918871252204586
10, 0.36787946428571428571
11, 0.36787943923360590027
12, 0.36787944132128159906
13, 0.36787944116069116069
14, 0.36787944117216190629
15, 0.36787944117139718992
16, 0.36787944117144498469
17, 0.36787944117144217323
18, 0.36787944117144232942
19, 0.36787944117144232120
20, 0.36787944117144232161
```



Para terminar, vejamos como o Princípio da Inclusão-Exclusão também serve para resolver o Problema (B2) da Introdução.

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ e denotemos o conjunto dos primeiros n números naturais por $[n]$. Designando o conjunto $\{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } a_i\}$ por A_i, o número pedido dos inteiros positivos inferiores ou iguais a n, não divisíveis por nenhum dos elementos de A é o cardinal de $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}$.

Claramente $|A_i|$ é a parte inteira do número $\frac{n}{a_i}$, ou seja, $\left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor$. Como

$$A_i \cap A_j = \{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } a_i \text{ e } a_j\} = \{x \in [n] \mid x \text{ é divisível por } \mathrm{mmc}(a_i, a_j)\}$$

então $|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i,a_j)} \right\rfloor$. Mais geralmente, $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}| = \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_{i_1},\ldots,a_{i_l})} \right\rfloor$, pelo que $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_t}|$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_i,a_j)} \right\rfloor - \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{\mathrm{mmc}(a_1,a_2,\ldots,a_t)} \right\rfloor.$$

No caso particular em que os elementos de A são todos primos entre si, o número de inteiros positivos inferiores ou iguais a n que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{a_i a_j a_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_t} \right\rfloor.$$

Por exemplo, para $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$ e $n = 1000$, este número é igual a:

```
> B2 := proc(a_1,a_2,a_3,a_4,n::integer)
>    local A_1, A_2, A_3, A_4, A_1_2, A_1_3, A_1_4, A_2_3, A_2_4, A_3_4,
>          A_1_2_3, A_1_2_4, A_1_3_4, A_2_3_4, A_1_2_3_4;
>    A_1 := floor(n/a_1);
>    A_2 := floor(n/a_2);
>    A_3 := floor(n/a_3);
>    A_4 := floor(n/a_4);
>    A_1_2 := floor(n/(a_1*a_2));
>    A_1_3 := floor(n/(a_1* a_3));
>    A_1_4 := floor(n/(a_1*a_4));
>    A_2_3 := floor(n/(a_2*a_3));
>    A_2_4 := floor(n/(a_2*a_4));
>    A_3_4 := floor(n/(a_3*a_4));
>    A_1_2_3 := floor(n/(a_1*a_2*a_3));
>    A_1_2_4 := floor(n/(a_1*a_2*a_4));
>    A_1_3_4 := floor(n/(a_1*a_3*a_4));
>    A_2_3_4 := floor(n/(a_2*a_3*a_4));
>    A_1_2_3_4 := floor(n/(a_1*a_2*a_3*a_4));
>    RETURN(n - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + A_1_2 + A_1_3 + A_1_4 + A_2_3 + A_2_4 + A_3_4
           - (A_1_2_3 + A_1_2_4 + A_1_3_4 + A_2_3_4) + A_1_2_3_4);
> end;
> B2(2,3,5,7,1000);
```

$$228$$

Contemos agora o número $\phi(n)$ de inteiros positivos, inferiores a n, primos com n. Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ a factorização de n em números primos. Como os conjuntos

$$\Big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k,n) = 1\Big\}$$

e

$$\Big\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } p_i \not| k \text{ para } i = 1, 2, \ldots, t\Big\}$$

coincidem bastará aplicar a fórmula, acima deduzida, ao conjunto $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. Imediatamente se conclui que o número $\phi(n)$ é igual a

$$n - \sum_{i=1}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i} \Big\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1\\ i \leq j}}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \Big\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i \leq j \leq k}}^{t} \Big\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \Big\rfloor + \cdots + (-1)^t \Big\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_t} \Big\rfloor.$$

Como vimos em 1.3, a função

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \phi(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \mathrm{mdc}(k,n) = 1\}| \end{array}$$

é a chamada *função de Euler*, muito importante em Teoria dos Números.

Para terminar, vejamos um processo simples de contar os números primos entre 2 e $n \geq 2$. O crivo de Eratóstenes[34] é um processo que permite enumerar todos os primos entre 1 e qualquer inteiro positivo k:

- Calcula-se $c = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$;
- Apagam-se, na sucessão $2, 3, 4, \ldots, k$, todos os múltiplos de $2, 3, 4, \ldots, c$ (com excepção dos próprios números $2, 3, 4, \ldots, c$);
- Os números que restam são os primos entre 1 e k.

Então, para determinar o número de primos entre 1 e k, bastará:

- determinar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_t$ entre 1 e $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$, usando o crivo de Eratóstenes;
- em seguida, determinar, com a ajuda da fórmula acima deduzida, quantos inteiros positivos inferiores ou iguais a n não são divisíveis por nenhum dos elementos de $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. Como os primos entre $\left\lfloor \sqrt{n} + 1 \right\rfloor$ e n são exactamente os inteiros positivos inferiores ou iguais a n (com excepção do 1) que não são divisíveis por nenhum dos elementos de A, o seu número é igual a

$$M(n) = n - 1 - \sum_{i=1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor + \cdots + (-1)^t \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_t} \right\rfloor.$$

  Concluindo, o número de primos entre 1 e n será igual a $t + M(n)$.

Relações de recorrência

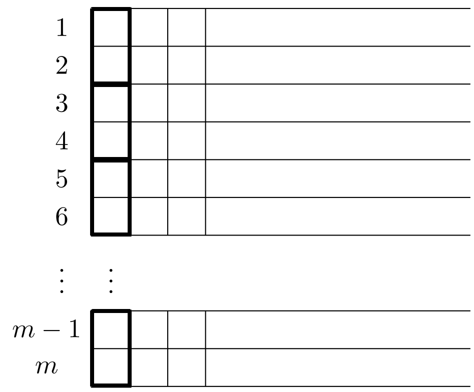
Recordemos o Problema (A6) do capítulo "Que é a Matemática Discreta?":

> *Consideremos um tabuleiro de xadrez e algumas peças (idênticas) de dominó tais que cada uma cobre precisamente 2 quadrados adjacentes do tabuleiro. Será possível dispor 32 dessas peças no tabuleiro de modo a cobri-lo, sem sobreposição de peças?*
> (Tal arranjo diz-se uma *cobertura perfeita* do tabuleiro por dominós.)

Não é difícil concluir que, em geral, um tabuleiro $m \times n$ possui uma cobertura perfeita se e só se pelo menos um dos números m ou n é par:

Se o tabuleiro possui uma cobertura perfeita então o dobro do número de peças na configuração deverá ser igual a mn. Portanto $2|mn$ pelo que $2|m$ ou $2|n$. Reciprocamente suponhamos, sem perda de generalidade, que m é par. Nesse caso é evidente que cada coluna pode ser perfeitamente coberta (basta alinhar sucessivamente $m/2$ peças)

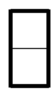
[34] Cf. `crivo.mws`.



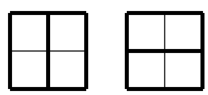
pelo que qualquer número n de colunas pode também ser coberto de modo perfeito.

Mais difícil é contar o número de coberturas perfeitas. Façamo-lo no caso mais simples de um tabuleiro $2 \times n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f(n)$ o número de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$. Comecemos por calcular $f(1), f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$:

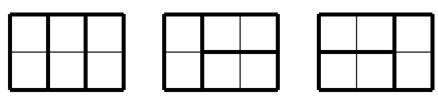
$f(1) = 1$:



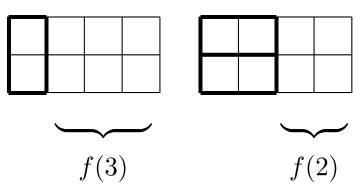
$f(2) = 2$:



$f(3) = 3$:



$f(4) = 5 = f(3) + f(2)$:

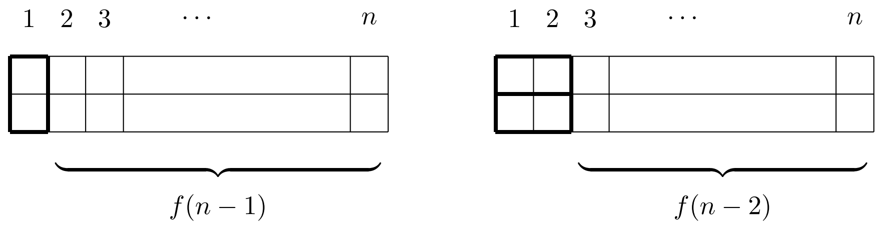


Analogamente, $f(5) = 8 = f(4) + f(3)$. Isto leva-nos a conjecturar que

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (n \geq 3).$$

Esta conjectura pode ser provada, por exemplo, do seguinte modo:

Para construir uma cobertura perfeita de um tabuleiro $2 \times n$ podemos colocar uma peça na vertical, a ocupar a coluna 1, e teremos depois $f(n-1)$ maneiras diferentes de cobrir o resto do tabuleiro, ou podemos colocar duas peças na horizontal, a ocupar as colunas 1 e 2, e cobrir depois o resto do tabuleiro, o que pode ser feito de $f(n-2)$ modos distintos:



Esta relação, conjuntamente com os valores iniciais $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$, determina univocamente a sequência dos números de coberturas perfeitas $f(1), f(2), f(3), \ldots$.

Por exemplo, $f(12)$ é igual a

$$f(11) + f(10) = 2f(10) + f(9) = 3f(9) + f(8) = \cdots = 21f(5) + 13f(4) = 233.$$

É claro que para valores muito grandes de n este método de cálculo de $f(n)$ não será praticável sem a ajuda de um computador[35], porque não temos aqui uma fórmula fechada para o valor de $f(n)$ mas sim uma *relação de recorrência* que estabelece o valor de f em n a partir de valores de f em inteiros anteriores a n.

Como podemos resolver relações de recorrência destas, isto é, como podemos obter, a partir da relação de recorrência, a respectiva fórmula fechada? É o que veremos agora.

Consideremos uma *sucessão* (infinita) de elementos de um conjunto S,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N}_0 & \to & S \\ & n & \mapsto & u(n). \end{array}$$

O valor $u(n)$ costuma representar-se simplesmente por u_n e é frequente apresentar uma sucessão dispondo sucessivamente as imagens da aplicação u:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots.$$

Muitas vezes uma sucessão é dada mediante a indicação do que se chama o seu *termo geral*, ou *termo de ordem* n (por exemplo, $u_n = n^2$, $u_n = \sin 2^n/(n+1)^2$, etc.). É uma situação cómoda pois, além de nesse caso ser possível calcular sem grandes problemas qualquer termo da sucessão, o estudo de várias propriedades (como a monotonia, convergência, etc.) fica muito facilitado. Usaremos a notação (u_n) para nos referirmos à sucessão $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Como vimos nos exemplos acima, nem sempre uma sucessão é definida por indicação do seu termo geral, mas sim por uma *relação de recorrência*: são dados uns tantos termos iniciais da sucessão, $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, e cada um dos seguintes determina-se a partir dos k anteriores por intermédio de uma relação que permanece invariável, $u_k = f(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$, $u_{k+1} = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, etc. Estas são as chamadas relações de recorrência para a sucessão (u_n). Ao número k chama-se *ordem* da relação de recorrência.

[35]Cf. `recorrencia.mws`.

Uma sucessão diz-se uma *solução* de uma relação de recorrência se os seus termos satisfizerem a relação. De entre todas as relações de recorrência destacam-se, não só pela sua simplicidade mas também pela frequência com que ocorrem, as chamadas *relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes*. São as do tipo

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n \geq k)}$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_k$ constantes.

O adjectivo "linear" refere-se ao facto de todos os valores de u ocorrerem como potências de expoente 1, enquanto que o adjectivo "homogéneo" refere-se ao facto de não existir termo independente (constante).

Por exemplo, $u_n = u_{n-1}^2 + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ não é linear, enquanto que $u_n = 3u_{n-1} + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ não é homogénea. Por outro lado, a relação $u_n = (n+2)u_{n-1} + 2u_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes (o primeiro coeficiente $n+2$ varia com n).

Exemplos. (1) As progressões geométricas de razão r satisfazem uma relação de recorrência homogénea linear de primeira ordem:

$$u_n = r u_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

(2) As progressões aritméticas de razão r podem ser vistas como sucessões satisfazendo relações de recorrência homogéneas lineares de segunda ordem: de $u_{n-1} = u_{n-2} + r$ e $u_n = u_{n-1} + r$ obtém-se, subtraindo a primeira identidade da segunda,

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

(3) A sucessão do número de coberturas perfeitas satisfaz uma relação de recorrência homogénea linear de segunda ordem.

Como em muitos problemas combinatoriais a solução aparece formulada em termos de uma relação de recorrência, torna-se imperativo saber manipulá-las e conhecer métodos que permitam obter uma fórmula explícita para o termo geral da respectiva sucessão.

Convirá desde já avisar que não existem métodos gerais que nos permitam resolver todas as relações de recorrência. Uma estratégia possível ("ingénua") será calcular um número razoável de termos e tentar intuir a lei de formação do termo geral, que pode depois ser confirmada pelo método de indução matemática. Com esta estratégia, algumas tentativas, mesmo em casos simples, mostrarão que não se trata de tarefa fácil.

Por exemplo, no caso das relações de recorrência lineares de primeira ordem, temos $u_1 = au_0$, $u_2 = au_1 = a^2 u_0$, etc., sendo fácil ver que, para qualquer $n \geq 1$, $u_n = a^n u_0$. Está assim encontrado o termo geral neste caso. No entanto, para as de segunda ordem, dados u_1 e u_2 e duas constantes a e b, temos:

$$\begin{aligned}
u_2 &= au_1 + bu_0 \\
u_3 &= au_2 + bu_1 = (a^2+b)u_1 + abu_0 \\
u_4 &= au_3 + bu_2 = (a^3+2ab)u_1 + (a^2b+b^2)u_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Não é fácil descortinar aqui uma lei de formação que permita conjecturar o que deverá ser u_n em função de n, a, b, u_0 e u_1. É claro que para as sucessões recorrentes lineares de ordem superior a situação será ainda pior.

Curiosamente, como veremos, o caso das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes é tratável de uma forma sistemática, embora as técnicas existentes se possam revelar muito trabalhosas na prática. Apesar de ser um método indirecto e pouco natural, é elegante e engenhoso.

Restringemo-nos então à classe das relações de recorrência lineares homogéneas com coeficientes constantes, isto é, das relações de recorrência da forma

$$\boxed{u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \quad (n = k, k+1, \dots)} \qquad (*)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_k$ são constantes. Podemos sempre supor que $a_k \neq 0$ pois, caso contrário, a relação reduz-se a uma de ordem inferior.

Associemos à relação de recorrência $(*)$, a equação

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0,$$

chamada *equação característica* de $(*)$. Esta equação tem k raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, chamadas *raízes características* de $(*)$. Claro que poderão ser números complexos, não todos distintos. Como $a_k \neq 0$, são todas não nulas.

Teorema 1. *Seja α um número complexo não nulo. A sucessão*

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n, \dots$$

é solução da relação de recorrência $(*)$ se e só se α é uma raiz característica.

Prova. A sucessão (u_n), onde $u_n = \alpha^n$, é uma solução de $(*)$ se e só se, para $n \geq k$,

$$\alpha^n = a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_k \alpha^{n-k}$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha^{n-k}(\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k) = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$, esta equação é ainda equivalente a

$$\alpha^k - a_1 \alpha^{k-1} - a_2 \alpha^{k-2} - \cdots - a_k = 0.$$

Portanto (α^n) é uma solução de $(*)$ se e só se α é uma raiz característica. □

Corolário. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ as raízes características de $(*)$. Para quaisquer constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$ a sucessão de termo geral*

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$$

é uma solução de $(*)$.

Prova. É um exercício simples verificar que sempre que $(u_n^1), (u_n^2), \ldots, (u_n^t)$ são soluções de $(*)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_t$ são constantes então a sucessão de termo geral

$$u_n = c_1 u_n^1 + c_2 u_n^2 + \cdots + c_t u_n^t$$

ainda é solução de $(*)$. Combinando este facto com o Teorema 1 obtemos imediatamente o Corolário. □

No caso das raízes características serem todas distintas podemos obter <u>todas</u> as soluções de $(*)$:

Teorema 2. *Suponhamos que as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ da relação de recorrência $(*)$ são distintas duas a duas. Neste caso, se uma sucessão de termo geral u_n é solução de $(*)$, existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que*

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n.$$

Prova. Seja (u_n) uma solução da relação de recorrência $(*)$. Uma vez que $(*)$, conjuntamente com os k valores iniciais $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, determinam completamente a sucessão (u_n), bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que a sucessão de termo geral $c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n \cdots + c_k \alpha_k^n$ satisfaz $(*)$ e tem como primeiros k elementos os valores $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Pelo Corolário, bastará provar que existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = u_0 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = u_1 \\ \quad \vdots \\ c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{k-1} = u_{k-1}. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de k equações lineares com k incógnitas. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

deste sistema é uma matriz muito especial, chamada *matriz de Vandermonde*. O seu determinante é dado por

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

(a prova deste facto encontra-se em muitos livros de Álgebra Linear). Como as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas distintas, este determinante é diferente de zero. Isto quer dizer que o sistema possui exactamente uma solução. □

Exemplos. A sucessão de Fibonacci $F(1), F(2), F(3), \ldots$ do problema (B4) da Introdução também é definida pela relação $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$, mas desta vez sujeita às condições iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$.

Procedimento `Maple` que calcula, por recursão, os termos da sucessão de Fibonacci:

```
> Fibonacci := proc(n::posint) option remember;
>    if n=1 or n=2 then RETURN( 1 ); fi;
>    Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
> end:
>
> seq(Fibonacci(i), i=1..20);
```

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$

As raízes da equação característica $x^2 - x - 1 = 0$ desta relação de recorrência são o *número de ouro* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o seu conjugado $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então, pelo Teorema 2, os números de Fibonacci são dados por

$$F(n) = c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

para algum par de constantes c_1 e c_2. As condições iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$ permitem-nos determinar tais constantes. Com efeito,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = F(0) = 0 \\ \\ c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = F(1) = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

```
> sol := solve({    c1 * evals[1] + c2 * evals[2] = 1,
>     c1 * evals[1]^2 + c2 * evals[2]^2 = 1
>     },
>     {c1,c2});
```

$sol := \{c2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, c1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\}$

Concluindo, os números de Fibonacci satisfazem a fórmula

$$\boxed{F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].}$$

```
> c1 := sqrt(5)/5; c2 := -sqrt(5)/5;
> evals := solve(x^2-x-1,x);
> seq(simplify(c1 * evals[1]^i + c2 * evals[2]^i), i=1..20);
```

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$

Fica assim resolvido o Problema (B4) da Introdução: o número de pares de coelhos existentes na ilha ao fim de n meses será igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Consequentemente, o número $f(n)$ de coberturas perfeitas de um tabuleiro $2 \times n$ é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big],$$

pois $f(n) = F(n+1)$.

Teste. *Pretendemos transmitir mensagens codificadas através de um determinado canal de comunicação. Essas mensagens são formadas por palavras de comprimento n, construídas com os símbolos ‘0’, ‘’1 e ‘2’ e sujeitas à condição “não podem aparecer palavras com dois símbolos ‘2’ consecutivos”. Seja $T(n)$ o* tamanho *deste código, isto é, o número de palavras que podemos transmitir com ele. Determine uma relação de recorrência que $T(n)$ satisfaça e determine explicitamente esse número, resolvendo a relação de recorrência.*

Solução. De acordo com a definição do código, $T(1) = 3$ (as únicas palavras de comprimento 1 são: ‘0’, ‘’1 e ‘2’) e $T(2) = 8$:

$$00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21.$$

Para $n \geq 3$ tem-se $T(n) = 2\,T(n-1) + 2\,T(n-2)$. De facto, as palavras de comprimento n que terminam em 0, bem como as que terminam em 1, são em número igual a $T(n-1)$:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}\boxed{}}_{T(n-1)}\boxed{0} \qquad\qquad \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}\boxed{}}_{T(n-1)}\boxed{1}$$

No entanto, nas palavras de comprimento n que terminam em 2, a penúltima posição $n-1$ já só pode conter os números 0 ou 1, pelo que as palavras são, no total, em número igual a $2\,T(n-2)$:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}}_{T(n-2)}\boxed{0}\boxed{2} \qquad\qquad \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}}_{T(n-2)}\boxed{1}\boxed{2}$$

A equação característica desta relação de recorrência é igual a $x^2 - 2x - 2 = 0$, que tem raízes $x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Portanto,

$$T(n) = c_1(1+\sqrt{3})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{3})^{n-1}.$$

Das condições iniciais tiramos

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3})^0 + c_2(1-\sqrt{3})^0 = 3 \\ \\ c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ \\ c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \\ c_2 = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\boxed{T(n) = \tfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{n-1} + \tfrac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{n-1}.}$$

Se as raízes características $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ não forem todas distintas então

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \qquad (1)$$

não é uma solução geral da relação de recorrência. Por exemplo, a relação de recorrência $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ tem como equação característica $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$. Neste caso (1) é igual a

$$u_n = c_1 2^n + c_2 2^n = (c_1 + c_2)2^n = c2^n$$

onde $c = c_1 + c_2$ é uma constante. Temos então uma só constante c e não será sempre possível escolhê-la de modo a que os dois valores iniciais u_1 e u_2 sejam satisfeitos. Por exemplo, se $u_0 = 1$ e $u_1 = 3$ teria que ser $c = 1$ e $2c = 3$, o que é manifestamente impossível. Portanto, $u_n = c2^n$ não é uma solução geral daquela relação (isto é, nem toda a solução da relação de recorrência pode ser expressa na forma $c2^n$ para alguma constante c).

O teorema seguinte, que não demonstraremos, diz-nos como determinar uma solução geral nestes casos. A ideia da demonstração é a mesma da do Teorema 2, mas naturalmente mais técnica e trabalhosa.

Teorema 3. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ as raízes distintas da equação característica da relação de recorrência (∗), com multiplicidades, respectivamente, $e_1, e_2, \ldots, e_t$. Uma sucessão de termo geral u_n é solução de (∗) se e só se existem constantes*

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1e_1}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2e_2}, \ldots, c_{t1}, c_{t2}, \ldots, c_{te_t}$$

tais que

$$\begin{aligned} u_n \quad = \quad & \Big(c_{11} + c_{12}n + \cdots + c_{1e_1}n^{e_1-1}\Big)\alpha_1^n + \Big(c_{21} + c_{22}n + \cdots + c_{2e_2}n^{e_2-1}\Big)\alpha_2^n + \cdots + \\ & + \Big(c_{t1} + c_{t2}n + \cdots + c_{te_t}n^{e_t-1}\Big)\alpha_t^n. \end{aligned}$$

Exemplo. Determinemos a solução da relação de recorrência

$$u_n = -u_{n-1} + 3u_{n-2} + 5u_{n-3} + 2u_{n-4} \quad (n = 4, 5, \ldots)$$

sujeita às condições iniciais $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2$. A equação característica $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ tem raízes -1 e 2, sendo -1 raiz de multiplicidade 3. Portanto, a parte da solução geral correspondente à raiz -1 é

$$(c_{11} + c_{12}n + c_{13}n^2)(-1)^n,$$

enquanto que a parte correspondente à raiz 2 é $c_{21}2^n$. As constantes estão sujeitas às condições iniciais

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_{11} + c_{21} & = & 1 \\ -c_{11} - c_{12} - c_{13} + 2c_{21} & = & 0 \\ c_{11} + 2c_{12} + 4c_{13} + 4c_{21} & = & 1 \\ -c_{11} - 3c_{12} - 9c_{13} + 8c_{21} & = & 2, \end{array}\right.$$

pelo que, resolvendo o sistema, obtemos $c_{11} = 7/9$, $c_{12} = -1/3$, $c_{13} = 0$ e $c_{21} = 2/9$. Em conclusão, a solução é

$$u_n = \left(\frac{7}{9} - \frac{1}{3}n\right)(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{9} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

O sucesso deste método depende da nossa capacidade em determinar as raízes da equação característica, o que poderá por vezes não ser possível. No caso de tal ser possível, será ainda necessário resolver um sistema de equações lineares. Se a ordem da relação de recorrência for k, este sistema tem k equações com k incógnitas. Portanto a aplicação deste método, na prática, poderá ser muito problemática.

Se a relação de recorrência não for homogénea ou linear, com coeficientes constantes, não se conhecem métodos para a resolver de uma forma sistemática (a não ser para alguns tipos de relações não homogéneas nas quais o termo independente tem uma forma muito especial — é um polinómio ou uma exponencial). Cada caso terá que ser analisado individualmente. Por exemplo, para resolver a relação de recorrência não homogénea $u_n = u_{n-1} + n^3$, para $n = 1, 2, \ldots$, sujeita à condição $u_0 = 0$, podemos, por sucessivas iterações, obter

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + n^3 \\ &= u_{n-2} + (n-1)^3 + n^3 \\ &= \cdots \\ &= u_1 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3. \end{aligned}$$

Assim, u_n é a soma dos primeiros n cubos. Podemos determinar uma expressão simples para esta soma? Usando a relação de recorrência podemos determinar os primeiros valores de u_n e tentar encontrar um padrão:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2 \\ u_3 &= 9 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2 \\ u_4 &= 36 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2 \\ u_5 &= 100 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2. \end{aligned}$$

Como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

podemos conjecturar que

$$u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

o que pode ser confirmado pelo método de indução matemática ou pelos métodos que vimos na Secção 1.2.

Apêndice

Para terminar, vejamos que no caso não homogéneo, é possível em alguns casos uma abordagem sistemática que nos conduza à solução. Uma recorrência linear, não necessariamente homogénea, de coeficientes constantes é dada por uma equação do tipo

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n), \tag{1}$$

onde o termo independente $g(n)$ é uma função de n que toma valores reais. A uma recorrência deste tipo podemos, esquecendo a função g, associar a recorrência homogénea

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}. \qquad (2)$$

Será de esperar que as soluções de (1) estejam relacionadas com as soluções de (2). De facto, é fácil provar que:

Teorema 4. *Seja*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n)$$

uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes e seja (α_n) *uma solução desta relação de recorrência. Se* (β_n) *é também uma solução dessa relação de recorrência, então a sucessão* $(\gamma_n) = (\beta_n - \alpha_n)$ *é uma solução da relação de recorrência homogénea*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}.$$

Reciprocamente, se (γ_n) *é uma solução desta relação de recorrência homogénea, então a sucessão* $(\beta_n) = (\alpha_n + \gamma_n)$ *é uma solução da relação de recorrência inicial.*

Assim, para determinar a expressão geral das soluções de uma dada relação de recorrência linear com coeficientes constantes, bastará:

(1) Obter a expressão geral das soluções (γ_n) da relação de recorrência homogénea associada;

(2) Identificar uma solução particular (β_n) da relação de recorrência dada;

(3) A expressão geral das soluções (α_n) da relação de recorrência é dada pela soma $(\alpha_n) = (\beta_n + \gamma_n)$.

O passo (1) pode realizar-se pelo método apresentado no caso homogéneo, mas a realização de (2) depende da função g envolvida. Em geral, não há nenhuma garantia que (2) se possa efectuar de modo fácil; os casos mais simples são aqueles em que g é polinomial ou exponencial. A tabela seguinte fornece-nos soluções particulares para esses casos:

Soluções particulares para a relação de recorrência linear com coeficientes constantes
$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n)$
onde $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1}x - a_k \qquad (*)$
é a equação característica da relação de recorrência homogénea associada

Função f	**Condições**	**Solução particular**
$f(n) = b\lambda^n$	λ não é raíz de $(*)$	$(\beta\lambda^n)$
$(b, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$	λ é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(\beta n^m \lambda^n)$
$f(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_r n^r$	1 não é raíz de $(*)$	$(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)$
$(r \in \mathbb{N}, b_0, \ldots, b_r \in \mathbb{R}, b_r \neq 0)$	1 é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r))$
$f(n) = bn^r\lambda^n$	λ não é raíz de $(*)$	$((\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$
$(r \in \mathbb{N}, b, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\})$	λ é raíz de $(*)$, com multiplicidade m	$(n^m(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\lambda^n)$

Bibliografia

[1] Carlos André e Fernando Ferreira, *Matemática Finita*, Universidade Aberta, 2000.

[2] Stephen Barnett, *Discrete Mathematics: Numbers and Beyond*, Prentice Hall, 1998.

[3] Jon Barwise e John Etchemendy, *Language, Proof and Logic*, CSLI Publications, 1999.

[4] James Hein, *Discrete Structures, Logic and Computability*, Portland State University, 2002.

[5] James Hein, *Maple Experiments in Discrete Mathematics*, Portland State University, Janeiro 2005.

[6] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, McGraw-Hill, 1995.

[7] Kenneth H. Rosen, *Exploring Discrete Mathematics with Maple*, McGraw-Hill, 1997.

[8] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1972.