

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h30m

1. Sejam p a proposição “*Conduzes a uma velocidade superior a 120*” e q a proposição “*És multado por excesso de velocidade*”. Traduza as frases seguintes na linguagem da lógica usando as letras p e q e os conectivos lógicos.
 - (a) Conduzes a uma velocidade superior a 120 mas não és multado por excesso de velocidade.
 - (b) Se não conduzires a uma velocidade superior a 120, não és multado por excesso de velocidade.
 - (c) Conduzires a uma velocidade superior a 120 é condição necessária para seres multado por excesso de velocidade.

2.
 - (a) Quando é que duas fórmulas bem formadas da lógica de proposições se dizem *logicamente equivalentes*?
 - (b) Calcule a tabela de verdade da fórmula $\neg(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge p$.
 - (c) Indique se se trata de uma fórmula logicamente equivalente a $q \vee \neg p$.

3. Determine:
 - (a) $f(13)$, onde $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a função definida por

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \quad (n \geq 2).$$
 - (b) $\sum_{i=1}^{40} \sum_{j=1}^{20} (i + ij)$.
 - (c) Os dois primeiros números naturais congruentes com 137 módulo 11.
 - (d) O número de passwords de comprimento 9 que é possível formar com 3 letras (a, b, c) , onde cada password contém exactamente um a .
 - (e) O número de passwords de comprimento 9 que é possível formar com 3 letras (a, b, c) , onde cada password contém exactamente 3 a 's, 3 b 's e 3 c 's.

4. Complete a seguinte expressão, preenchendo (na sua folha de prova) os espaços em branco com os números respectivos:

$$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + \text{---} x^5y^2 + \text{---} x^4y^3 + \text{---} x^3y^4 + \text{---} x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.$$

5. Considere a seguinte linha de um programa:

```
if  $n = 0$  then  $f(n) = 1$  else  $f(n) = (2n + 1) + f(n - 1)$ .
```

(a) Calcule $f(3)$.

(b) Usando o método de indução matemática, prove que $f(n) = (n+1)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

6. A disciplina A tem 100 alunos do sexo feminino e 80 alunos do sexo masculino. A disciplina B tem 80 alunos do sexo feminino e 100 alunos do sexo masculino. Existem exactamente 60 raparigas que frequentam ambas as disciplinas. O número total de alunos que frequentam pelo menos uma das disciplinas é igual a 230. Quantos rapazes são alunos de A e não são alunos de B ?

7. (a) Traduzindo as letras em números de acordo com a tabela

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

encripte a mensagem “MATEMATICA” usando a função de encriptação

$$f(p) = (2p + 5) \bmod 23.$$

(b) Desencripte a mensagem “ZIV LFRRFP” (encriptada pela mesma função).

8. (a) A solução de um problema tem 87 resultados possíveis. Se um algoritmo que resolve o problema corresponder a uma árvore de decisão ternária de profundidade d , qual é o menor valor possível para d ?

(b) A solução de um problema tem 85 resultados possíveis. Se um algoritmo que resolve o problema corresponder a uma árvore de decisão n -ária de profundidade 4, qual é o menor valor possível para n ?

9. (a) O que é um grafo bipartido? É um grafo bipartido completo?

(b) Quais são os grafos bipartidos completos que são árvores?

(c) Mostre que qualquer árvore é um grafo bipartido.
