Ano lectivo 2013/14	**Exame de Estruturas Discretas**
Lic.ª Eng. Informática	7/02/2014

SOLUÇÕES

---

1. (a) $p \wedge \neg q$.

   (b) $\neg p \to \neg q$.

   (c) $q \to p$.

2. (a) Duas fórmulas dizem-se logicamente equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.

   (b)

p	q	$\neg$	$(\neg q$	$\to$	$(p$	$\to$	$q))$	$\wedge$	p
$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	F	F	V	V	V	V	$\boxed{F}$	V
$\boxed{V}$	$\boxed{F}$	V	V	F	V	F	F	$\boxed{V}$	V
$\boxed{F}$	$\boxed{V}$	F	F	V	F	V	V	$\boxed{F}$	F
$\boxed{F}$	$\boxed{F}$	F	V	V	F	V	F	$\boxed{F}$	F

   (c) Não, pois:

p	q	q	$\vee$	$\neg p$
$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$	F
$\boxed{V}$	$\boxed{F}$	F	$\boxed{F}$	F
$\boxed{F}$	$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$	V
$\boxed{F}$	$\boxed{F}$	F	$\boxed{V}$	V

   (As tabelas dizem-nos mais: a negação de uma das fórmulas é que é logicamente equivalente à outra.)

   <u>Solução alternativa</u>:

   $\neg(\neg q \to (p \to q)) \wedge p \equiv \neg(q \vee (p \to q)) \wedge p \equiv \neg(q \vee \neg p \vee q) \wedge p \equiv \neg(q \vee \neg p) \wedge p \equiv \neg q \wedge p \wedge p \equiv \neg q \wedge p \equiv \neg(q \vee \neg p)$.

3. (a) $f(13) = f\left(\left\lceil \frac{13}{2} \right\rceil\right) + 13 = f(7) + 13 = f(4) + 7 + 13 = f(2) + 4 + 7 + 13 = f(1) + 2 + 4 + 7 + 13 = 0 + 1 + 2 + 4 + 7 + 13 = 27$.

   (b) $$\sum_{i=1}^{40}\sum_{j=1}^{20}(i+ij) = \sum_{i=1}^{40}\Big(\sum_{j=1}^{20} i + \sum_{j=1}^{20} ij\Big) = \sum_{i=1}^{40}\Big(20i + i\sum_{j=1}^{20} j\Big) = \sum_{i=1}^{40}\Big(20i + i\frac{20\times 21}{2}\Big) =$$
   $$\sum_{i=1}^{40} 230i = 230\sum_{i=1}^{40} i = 230 \times \frac{40\times 41}{2} = 230 \times 20 \times 41 = \cdots$$

   (c) Como $137 \mod 11 = 5$ então 5 é o primeiro natural congruente com 137 módulo 11. Claro que o seguinte será o número $5 + 11 = 16$.

(d) Temos 9 possibilidades para colocar a letra a (num dos quaisquer 9 lugares da palavra). Para cada uma dessas possibilidades, podemos depois distribuir as letras b e c livremente pelos 8 lugares restantes (e isso pode ser feito de $\overline{\mathrm{P}}(2,8) = 2^8$ maneiras distintas). Portanto, podemos formar 9×2^8 passwords.

(e) Temos $\mathrm{C}(9,3)$ possibilidades para colocar a letra a (num dos quaisquer subconjuntos de 3 lugares da palavra). Para cada uma dessas possibilidades, podemos depois distribuir a letra b escolhendo o conjunto de 3 lugares (entre os 6 disponíveis) onde a colocamos. Isso pode ser feito de $\mathrm{C}(6,3)$ modos diferentes. Para a letra c não restam alternativas: ocupam os 3 lugares restantes. No total podemos assim formar $\mathrm{C}(9,3) \times \mathrm{C}(6,3) = \frac{9!}{6!\,3!} \times \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{9!}{3!\,3!\,3!} = 3 \times 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 1680$ passwords.

Solução alternativa: O número de passwords é igual ao número de permutações sem repetição que podemos formar com 9 letras diferentes (por exemplo, $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$), onde a ordem pela qual escrevemos o grupo de letras a, a', a'', o grupo de letras b, b', b'' e o grupo de letras $c, c'c''$ é irrelevante. Sem esta última restrição, o número total de permutações seria evidentemente $\mathrm{P}(9,9) = 9!$. Com essa restrição, teremos que dividir o número 9! sucessivamente pelo número de permutações das 3 letras a, a', a'', pelo número de permutações das 3 letras b, b', b'' e pelo número de permutações das 3 letras c, c', c'', ou seja, $\frac{9!}{3!\,3!\,3!}$.

4. Os coeficientes do desenvolvimento do binómio são 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^7 &= x^7 + \binom{7}{1}x^6y + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}xy^6 + y^7 \\
&= x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.
\end{aligned}
$$

5. (a) $f(3) = (2\times 3+1) + f(2) = 7 + f(2) = 7+5+f(1) = 7+5+3+f(0) = 7+5+3+1 = 16.$

(b) O caso $n = 0$ é óbvio: por um lado, $f(0) = 1$, e por outro, $(0+1)^2 = 1$, pelo que coincidem. Suponhamos agora, por hipótese de indução, que $f(k) = (k+1)^2$. Teremos que provar que então também $f(k+1) = (k+1+1)^2$. Usando a definição de f obtemos

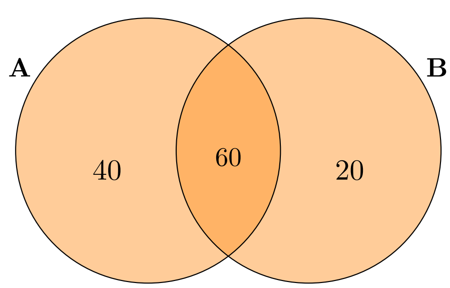
$$f(k+1) = (2(k+1)+1) + f((k+1)-1) = 2k+3+f(k).$$

Logo, pela hipótese de indução, segue

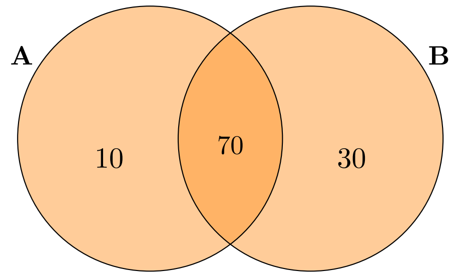
$$f(k+1) = 2k+3+(k+1)^2 = k^2+4k+4 = (k+2)^2 = (k+1+1)^2.$$

Portanto, $f(n) = (n+1)^2$ para qualquer n.

6. A informação sobre a distribuição das raparigas pelas disciplinas é evidente:



Logo existem 120 raparigas e, consequentemente, $230 - 120 = 110$ rapazes. Vejamos quais os cardinais dos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ nos rapazes. Como 80 frequentam a disciplina $\mathbf{A}$ e 100 frequentam a disciplina $\mathbf{B}$, então $110 = |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 80 + 100 - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$. Portanto, $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = 70$:



Concluindo, 10 rapazes são alunos de $\mathbf{A}$ e não são alunos de $\mathbf{B}$.

7. (a) $f(M) = f(11) = 27 \bmod 23 = 4 = \mathbf{E}$, $f(A) = f(0) = 5 \bmod 23 = 5 = \mathbf{F}$,
$f(T) = f(18) = 41 \bmod 23 = 18 = \mathbf{T}$, $f(E) = f(0) = 13 \bmod 23 = 13 = \mathbf{O}$,
$f(I) = f(8) = 21 \bmod 23 = 21 = \mathbf{X}$, $f(C) = f(2) = 9 \bmod 23 = 9 = \mathbf{J}$.

Mensagem encriptada: **EFTOEFTXJF**

(b) Cálculo da função de desencriptação:

$$\begin{aligned} q = f(p) = (2p+5) \bmod 23 \quad &\Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 2p+5 \\ &\Leftrightarrow \quad q - 5 \equiv_{23} 2p \\ &\Leftrightarrow \quad 12(q-5) \equiv_{23} p. \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 12(q-5) \bmod 23$.
Então, $f^{-1}(Z) = f^{-1}(22) = 12 \times 17 \bmod 23$. Como $12 \times 2 \bmod 23 = 1$, então $12 \times 17 \bmod 23 = (12 \times 2 \times 8 + 12) \bmod 23 = (8 + 12) \bmod 23 = 20$. Logo,

$$f^{-1}(Z) = 20 = \mathbf{V}.$$

Quanto às outras letras:

$$f^{-1}(I) = f^{-1}(8) = 36 \bmod 23 = 13 = \mathbf{O}.$$

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(20) = 12 \times 15 \bmod 23 = (12 \times 2 \times 7 + 12) \bmod 23 = (7+12) \bmod 23 = 19 = \mathbf{U}.$$

$$f^{-1}(L) = f^{-1}(10) = 12 \times 5 \bmod 23 = (12 \times 2 \times 2 + 12) \bmod 23 = (2+12) \bmod 23 = 14 = \mathbf{P}.$$

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(5) = 12 \times 0 \bmod 23 = 0 = \mathbf{A}.$$

$$f^{-1}(R) = f^{-1}(16) = 12 \times 11 \bmod 23 = (12 \times 2 \times 5 + 12) \bmod 23 = (5+12) \bmod 23 = 17 = \mathbf{S}.$$

$$f^{-1}(P) = f^{-1}(14) = 12 \times 9 \bmod 23 = (12 \times 2 \times 4 + 12) \bmod 23 = (4+12) \bmod 23 = 16 = \mathbf{R}.$$

Mensagem original: **VOU PASSAR** !

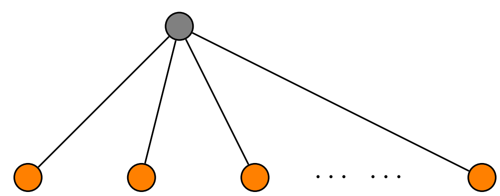
8. (a) Como existem 87 possíveis resultados, a árvore terá que ter pelo menos 87 folhas. Mas tal árvore, sendo ternária com profundidade d, tem no máximo 3^d folhas. Assim, $87 \leq 3^d$. Resolvendo esta inequação obtemos $\lceil log_3 87 \rceil \leq d$, o que dá $d \geq 5$.

   (b) Como existem 85 possíveis resultados, a árvore terá que ter pelo menos 85 folhas. Mas tal árvore, sendo n-ária com profundidade 4, tem no máximo n^4 folhas. Portanto, $85 \leq n^4$, o que dá $n \geq 4$.

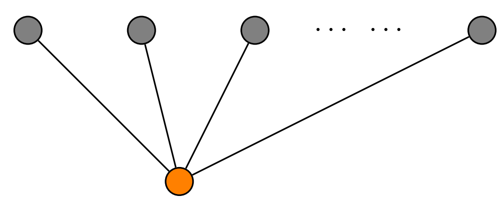
9. (a) Um grafo diz-se bipartido se o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que só existem arestas ligando vértices de V_1 a vértices de V_2. Será bipartido completo se for bipartido e contiver o maior número possível de arestas (ou seja, todos os vértices de V_1 estão ligados a todos os vértices de V_2).

   (b) Denotemos o grafo bipartido completo no qual o conjunto V_1 tem m vértices e V_2 tem n vértices por $K_{m,n}$. Quais $K_{m,n}$ são árvores? É evidente que se $m = 1$ ou $n = 1$ então é uma árvore:

   $K_{1,n}$:

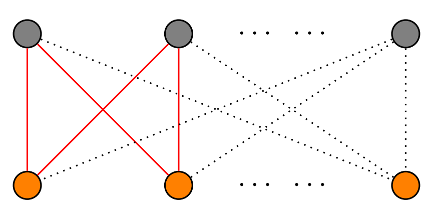


   $K_{m,1}$:

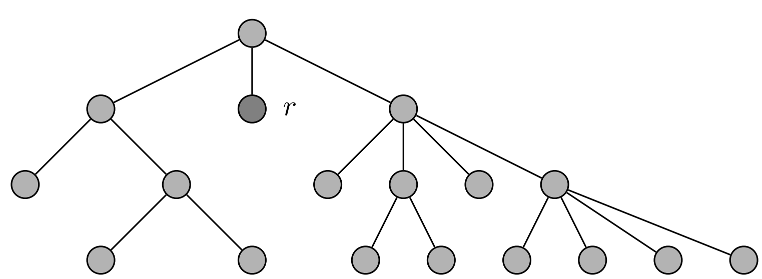


   Nos restantes casos (isto é, quando $m > 1$ e $n > 1$) o grafo contém sempre um ciclo (marcado a vermelho na figura) pelo que não é uma árvore:

   $K_{m,n}$:



   (c) Dada uma árvore arbitrária G, fixemos uma raiz r. Por exemplo:



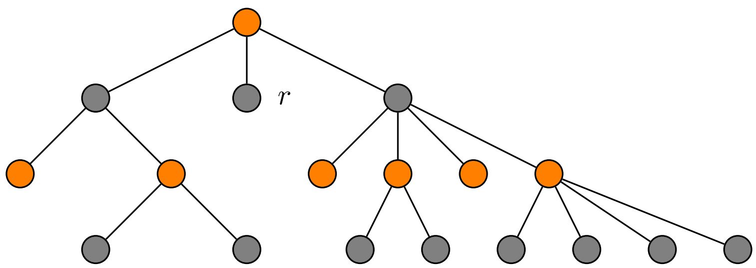
Podemos então distribuir os vértices de G pelos conjuntos

$$V_1 = \{\text{vértices de } G \text{ cuja distância a } r \text{ é par}\}$$

(que colorimos a cinzento) e

$$V_2 = \{\text{vértices de } G \text{ cuja distância a } r \text{ é ímpar}\}$$

(que colorimos a laranja). Por exemplo, na árvore acima fica:



Evidentemente só existem arestas na árvore a ligar vértices de V_1 a vértices de V_2 (senão a árvore conteria ciclos!) pelo que o grafo é bipartido.