Ano lectivo 2013/14 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 13/11/2013

SOLUÇÕES

---

1. (a1) $\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$ (a2) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$

(b) São ambos válidos pois correspondem a fórmulas que são tautologias:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\wedge$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

<u>Solução alternativa</u>:

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p &\equiv \neg((p \leftrightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee q \vee \neg p \\ &\equiv \neg(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p) \vee q \vee \neg p \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee q \vee \neg p \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee q \vee \neg p \equiv (q \wedge \neg p) \vee ((p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)) \\ &\equiv (q \wedge \neg p) \vee (\mathsf{V} \wedge \mathsf{V}) \equiv \mathsf{V}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p &\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p \equiv \neg(p \rightarrow q) \vee q \vee \neg p \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee q \vee \neg p \equiv (p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p \\ &\equiv ((p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)) \equiv \mathsf{V} \wedge \mathsf{V} \equiv \mathsf{V}.\end{aligned}$$

2. (a)

	Mundo A	**Mundo B**
(a1)	V	V
(a2)	F	V
(a3)	V	F
(a4)	F	V
(a5)	F	F

(b) **Mundo A**: todos os pares (x, y) com $x, y \in \{a, b, c, d\}$.
Mundo B: $x = d, y = d$.

(c) É uma consequência imediata das leis de De Morgan para os quantificadores e do facto de nos mundos Tarski só existirem 3 formas possíveis para os objectos:

$$\begin{aligned}&\neg\,\forall x\ \forall y\ (\neg SameShape(y, x) \vee Tet(y) \vee Cube(x)) \\ &\equiv \exists x\, \neg\,\forall y\ (\neg SameShape(y, x) \vee Tet(y) \vee Cube(x)) \\ &\equiv \exists x\, \exists y\ \neg\,(\neg SameShape(y, x) \vee Tet(y) \vee Cube(x)) \\ &\equiv \exists x\, \exists y\ (SameShape(y, x) \wedge \neg\, Tet(y) \wedge \neg\, Cube(x)) \\ &\equiv \exists x\, \exists y\ (Dodec(x) \wedge Dodec(y))\end{aligned}$$

(Como x e y têm que ter a mesma forma e x não pode ser um cubo e y um tetraedro só resta a hipótese de serem ambos dodecaedros).

Nota: Usando esta fórmula equivalente, a resposta à alínea anterior é agora óbvia.

3. (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2+3^i)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{n+i}{i+1}$. Claro que a resposta $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{n+i-1}{i}$ também está correcta.

   (c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\frac{i+1}{x^i}$.

4. (a) Os termos desta progressão aritmética são

$$1,\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2,\ 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\ \cdots$$

ou seja

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \ldots,\ \frac{n}{2},\ldots$$

Portanto a soma dos primeiros 100 termos é igual a

$$\sum_{i=2}^{101}\frac{i}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{101}i=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{101}i-1\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{101\times 102}{2}-1\Big)=\frac{1}{2}\Big(101\times 51-1\Big)=\frac{5150}{2}=2575.$$

Solução alternativa: Os primeiros n termos da progressão aritmética de razão r e primeiro termo a são

$$a,\ a+r,\ a+2r,\cdots,\ a+(n-1)r.$$

No nosso caso queremos calcular

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+ir)=\sum_{i=0}^{99}(1+\frac{i}{2})=100+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{99}i=100+\frac{1}{2}\times\frac{99\times 100}{2}=100+99\times 25=2575.$$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{51}[i\cos(j\pi)]=\sum_{i=1}^{100}i\sum_{j=1}^{51}\cos(j\pi)=\sum_{i=1}^{100}(-i)=-\frac{100\times 101}{2}=-50\times 101=-5050$ pois $\displaystyle\sum_{j=1}^{51}\cos(j\pi)=(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)+1+(-1)=-1.$

5. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=3\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}2=3\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{3n(n+1)-4n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$.

   (b) Seja $P(n)$ a identidade

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n\in\mathbb{N}$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $P(1)$ é V: É óbvio, pois a identidade $P(1)$ resume-se a $1=\dfrac{3-1}{2}$.

(2) A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$: Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é, $\sum_{i=1}^{k}(3i-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) = \sum_{i=1}^{k}(3i-2)+[3(k+1)-2] = \frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1) = \frac{k(3k-1)+6k+2}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2},$$

enquanto

$$\frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2},$$

o que mostra que $P(k+1)$ é V.

6.

	Valor inicial	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$\boxed{i=5}$
var	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$	$\frac{\frac{3}{4}+1}{2}=\frac{7}{8}$	$\frac{\frac{7}{8}+1}{2}=\frac{15}{16}$	$\frac{\frac{15}{16}+1}{2}=\frac{31}{32}$	$\frac{\frac{31}{32}+1}{2}=\frac{63}{64}$

Portanto,

$$var(1) = \frac{3}{4} = \frac{2^2-1}{2^2},\ var(2) = \frac{7}{8} = \frac{2^3-1}{2^3},\ var(3) = \frac{15}{16} = \frac{2^4-1}{2^4},\ var(4) = \frac{31}{32} = \frac{2^5-1}{2^5},$$

$$var(5) = \frac{63}{64} = \frac{2^6-1}{2^6}.$$

É então claro que

$$var(n) = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

7. (a)

n	3^n	$n!$
1	3	1
2	9	2
3	27	6
4	81	24
5	243	120
6	729	720
$\boxed{7}$	2187	5040

(b) Seja $P(n)$ a desigualdade $3^n < n!$. Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n \geq 7$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $P(7)$ é V: É óbvio, pela alínea anterior.

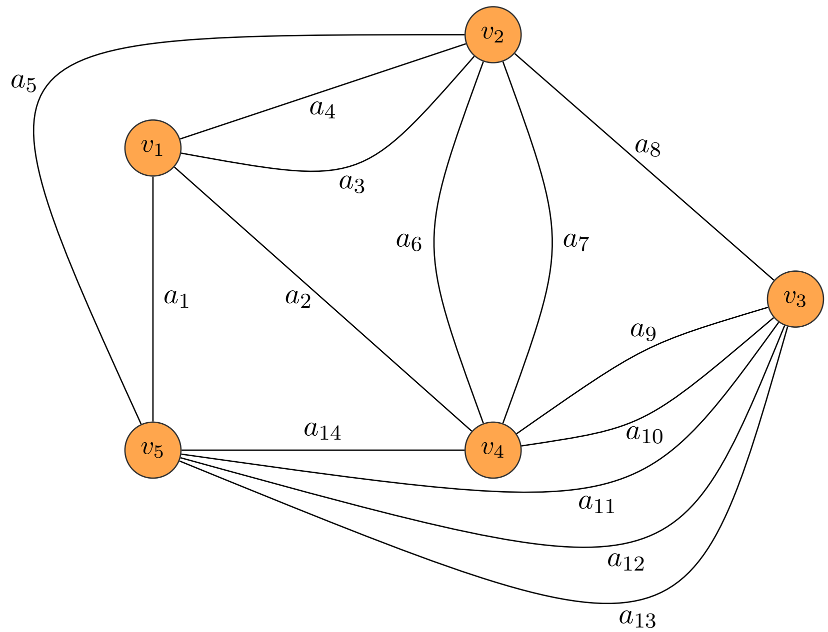
(2) A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 7$: Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é, $3^k < k!$. Então

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k < 3 \times k! < (k+1)k! = (k+1)!,$$

pois $3 < k+1$ (uma vez que $k \geq 7$).

8. (a) Tem 14 arestas (= soma das entradas da matriz na metade triangular superior).

(b)



(c) Claro que G é euleriano pois os seus vértices têm todos grau par. Como G tem uma grande diversidade de arestas é evidente que existem muitos caminhos eulerianos. Um exemplo:

$$\boxed{v_5} - a_5 \to a_8 \to a_{13} \to a_1 \to a_4 \to a_7 \to a_9 \to a_{12} \to a_{14} \to a_2 \to a_3 \to a_6 \to a_{10} \to a_{11} - \boxed{v_5}$$

que é a união dos seguintes ciclos: