

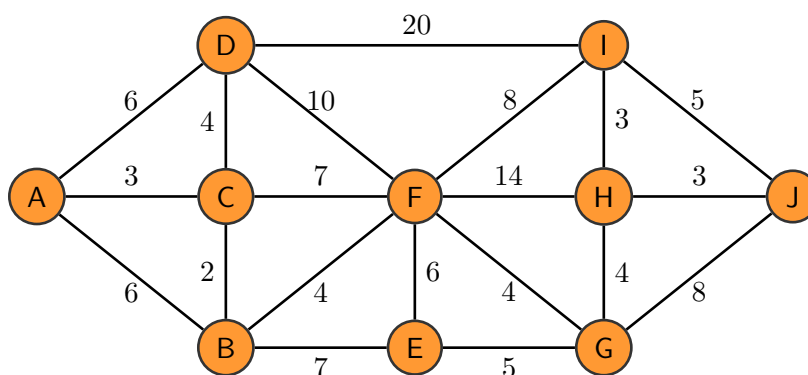
Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h00m

1. Usando o algoritmo de Dijkstra (explicitando os passos essenciais), determine o trajecto mais curto

- (a) de A para J ,
 (b) de A para I ,

no grafo



Será possível percorrer todas as arestas deste grafo, cada uma exactamente uma vez, iniciando o percurso em A e terminando em J ?

2. Calcule o número de elementos dos seguintes conjuntos:
- (a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x^2 < 500\}$.
 (b) $\{5, 9, 13, \dots, 145, 149\}$.
 (c) Conjunto de sacos de 7 peças de fruta que podem ser escolhidas de uma colecção de ameixas, bananas, laranjas, maçãs e pêras.
 (d) Conjunto das sequências que podem ser formadas permutando entre si as letras da palavra "LETTERS".
3. Considere um baralho normal de 52 cartas.
- (a) Quantas mãos de duas cartas existem?
 (b) Quantas mãos de duas cartas com o mesmo valor existem?
 (c) Quantas mãos de quatro cartas em que exactamente três são do mesmo naipe existem?
4. Calcule:
- (a) Os primeiros 10 números naturais congruentes com 7 módulo 9.
 (b) Os cinco primeiros números naturais congruentes com 137 módulo 11.

(c) O primeiro natural x tal que $7x \equiv 1 \pmod{23}$.

5. Decodifique a mensagem “DFXULJPT”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (7p - 1) \pmod{23},$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \dots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

6. Determine o número de elementos da união $A \cup B \cup C$ de três conjuntos, com 100 elementos cada, se:

- (a) os conjuntos forem disjuntos dois a dois.
- (b) existirem 50 elementos comuns a cada par de conjuntos e nenhum elemento na intersecção dos três.
- (c) existirem 50 elementos comuns a cada par de conjuntos e 25 elementos na intersecção dos três.

7. Suponha que uma bactéria necessita de duas horas para se desenvolver, após as quais produz dois descendentes e, posteriormente, mais dois descendentes no final de cada hora subsequente. Supondo que o processo se inicia com uma única bactéria acabada de nascer, e admitindo que todos os descendentes têm o mesmo comportamento,

- (a) liste os primeiros 6 termos da sequência do número b_n ($n \in \mathbb{N}_0$) de bactérias existentes na colónia após n horas;
- (b) determine (de forma explícita) o valor de b_n para qualquer n .

8. Num laboratório há uma célula que se divide inicialmente em 3. As células seguintes ou não se dividem ou se dividem em 2 ou em 4. A determinada altura observou-se esta cultura de células e contaram-se 102 células. Quais os números máximos e mínimos de divisões em 4 e em 2 células que poderiam ter ocorrido até então?
