Ano lectivo 2013/14 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 18/12/2013

SOLUÇÕES

---

1. Iterando o algoritmo de Dijkstra obtemos:

Vértices	Etiquetas temporárias	Etiq. definitivas
A	0 (A)	0 (A)
B	~~6 (A-B)~~ 5 (A-C-B)	5 (A-C-B)
C	3 (A-C)	3 (A-C)
D	6 (A-D)	6 (A-D)
E	12 (A-C-B-E)	12 (A-C-B-E)
F	~~10 (A-C-F)~~ 9 (A-C-B-F)	9 (A-C-B-F)
G	13 (A-C-B-F-G)	13 (A-C-B-F-G)
H	~~23 (A-C-B-F-I-H)~~ 17 (A-C-B-F-G-H)	17 (A-C-B-F-G-H)
I	~~17 (A-D-I)~~ 17 (A-C-B-F-I)	17 (A-C-B-F-I)
J	~~21 (A-C-B-F-G-J)~~ 20 (A-C-B-F-G-H-J)	20 (A-C-B-F-G-H-J)

Não é possível percorrer todas as arestas deste grafo, cada uma exactamente uma vez, iniciando o percurso em A e terminando em J, pois apesar de A e J terem grau ímpar, entre os vértices restantes existem mais vértices de grau ímpar (E e F).

2. (a) Note que $22^2 = 484$ e $23^2 = 529$ pelo que o conjunto dado é o conjunto $\{1, 2, ..., 22\}$, que tem cardinalidade 22.

   (b) O conjunto dado é o conjunto $\{5 + 4x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 0 \leq x \leq 36\}$, que tem a mesma cardinalidade que $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$, ou seja, 37.

   (c) Cada saco é um multiconjunto de cardinal 7 que se pode formar com 5 tipos de objectos diferentes (a's, b's, l's, m's e p's). Portanto o número de sacos é iguala

$$\overline{C}(5,7) = C(5+71,7) = C(11,7) = \frac{11!}{7! \times 4!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2} = 330.$$

   (d) Se as letras fossem todas distintas, o número de sequências seria igual a $P(7,7) = 7!$. No entanto, duas das letras ('E' e 'T') aparecem duas vezes pelo que teremos que dividir esse número 7! por 2×2. Assim, a resposta é igual a

$$\frac{7!}{2 \times 2} = 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 42 \times 30 = 1260.$$

3. (a) Tantas quantos os subconjuntos de 2 cartas: $C(52, 2) = 1326$.

   (b) Existem $C(4, 2)$ maneiras diferentes de escolher, entre os 4 naipes disponíveis, os dois naipes das duas cartas na mão. Finalmente, como cada naipe tem 13 cartas distintas, existem $13 \times C(4, 2) = 78$ mãos de duas cartas com o mesmo valor.

   (c) Existem 4 possibilidades (naipes) para as 3 cartas do mesmo naipe. Estas podem ser escolhidas de entre as 13 cartas desse naipe. Existem assim $4 \times C(13, 3)$ modos diferentes de escolher as 3 cartas do mesmo naipe. A restante carta pode ser uma das $3 \times 13 = 39$ cartas dos outros três naipes. Em conclusão, existem $4 \times C(13, 3) \times 39 = 44616$ mãos de quatro cartas em que exactamente três são do mesmo naipe.

4. (a) Claro que $7 \equiv_9 7$ pelo que o conjunto dos naturais congruentes com 7 módulo 9 é o conjunto $\{7 + 9k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Os 10 primeiros desta lista são os números

$$7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, 88.$$

   (b) Como $137 \mod 11 = 5$ então $5 \equiv_{11} 137$ pelo que o conjunto dos naturais congruentes com 137 módulo 11 é o conjunto $\{5 + 11k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Os 5 primeiros desta lista são os números

$$5, 16, 27, 38, 49.$$

   (c) Determinar x equivale a encontrar o primeiro múltiplo de 7 que é congruente com 1 módulo 23. Como a lista dos primeiros naturais congruentes com 1 módulo 23 é a lista

$$1, 24, 47, 70, 93, \ldots$$

   é evidente que esse múltiplo de 7 é o número $70 = 7 \times 10$. Portanto $x = 10$.

   Solução alternativa: Usando o algoritmo de Euclides podemos concluir que $\text{mdc}(7, 23) = 1$:

$$23 = 3 \times 7 + 2,$$

$$7 = 3 \times 2 + 1.$$

   Então $1 = 7 - 3 \times 2 = 7 - 3 \times (23 - 3 \times 7) = 10 \times 7 - 3 \times 23$. Uma vez que -3×23 é congruente com 0 módulo 23, segue que 10×7 é congruente com 1 módulo 23. Logo $x = 10$.

5. Cálculo da função de desencriptação (usando a alínea (c) da questão anterior):

$$\begin{aligned} q = f(p) = (7p - 1) \bmod 23 \quad &\Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 7p - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad q + 1 \equiv_{23} 7p \\ &\Leftrightarrow \quad 10(q + 1) \equiv_{23} p. \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 10(q + 1) \bmod 23$. Logo:

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(3) = 40 \bmod 23 = 17 = \mathbf{S}$$

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(5) = 60 \bmod 23 = 14 = \mathbf{P}$$

(note que pode fazer este cálculo usando o anterior: $60 \bmod 23 = (40 + 20) \bmod 23 = (17 + 20) \bmod 23 = 14$)

$$f^{-1}(X) = f^{-1}(21) = 220 \bmod 23 = 13 = \mathbf{O}$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(19) = 200 \bmod 23 = 16 = \mathbf{R}$$

(pois $200 \bmod 23 = (220 - 20) \bmod 23 = (13 - 20) \bmod 23 = 16$)

$$f^{-1}(L) = f^{-1}(10) = 110 \bmod 23 = 18 = \mathbf{T}$$

$$f^{-1}(J) = f^{-1}(9) = 100 \bmod 23 = 8 = \mathbf{I}$$

(pois $100 \bmod 23 = (110 - 10) \bmod 23 = (18 - 10) \bmod 23 = 8$)

$$f^{-1}(P) = f^{-1}(14) = 150 \bmod 23 = 12 = \mathbf{N}$$

(pois $150 \bmod 23 = (110 + 40) \bmod 23 = (18 + 17) \bmod 23 = 12$)

$$f^{-1}(T) = f^{-1}(18) = 190 \bmod 23 = 6 = \mathbf{G}$$

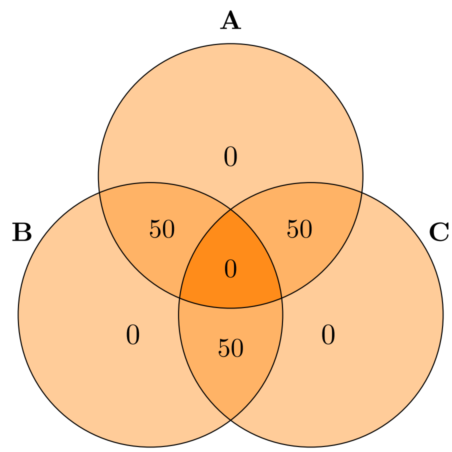
(pois $190 \bmod 23 = (200 - 10) \bmod 23 = (16 - 10) \bmod 23 = 6$).

Mensagem original: **S P O R T I N G** !

6. (a) Como os conjuntos são disjuntos dois a dois, pelo Princípio da Adição tem-se

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| = 100 + 100 + 100 = 300.$$

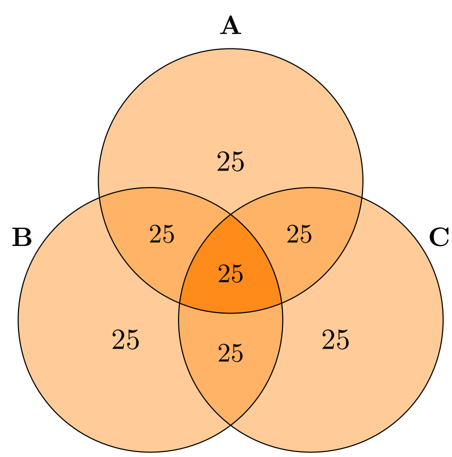
(b) Neste caso a situação só pode ser a seguinte (repare que se trata de um caso limite: não podem ser mais de 50 elementos comuns a cada par de conjuntos pois 50+50=100):



Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 300 - 50 - 50 - 50 + 0 = 150.$$

(c) Neste caso a situação é a seguinte:



Então, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 300 - 50 - 50 - 50 + 25 = 175.$$

7. (a) Evidentemente $b_0 = b_1 = 1$ e $b_2 = 3$. Ao fim de n meses, o número b_n de bactérias existentes será igual ao número de bactérias existentes no final do mês anterior (ou seja, b_{n-1}) mais as que entretanto foram produzidas no decorrer desse mês (cujo número é igual ao dobro do número de bactérias em condições de se reproduzir nesse mês, ou seja, $2b_{n-2}$). Assim,

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}.$$

Portanto, os primeiros 6 termos da sequência são:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 11, \quad b_5 = 21.$$

(b) Trata-de de uma relação de recorrência de segunda ordem com equação característica

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Resolvendo-a obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -1.$$

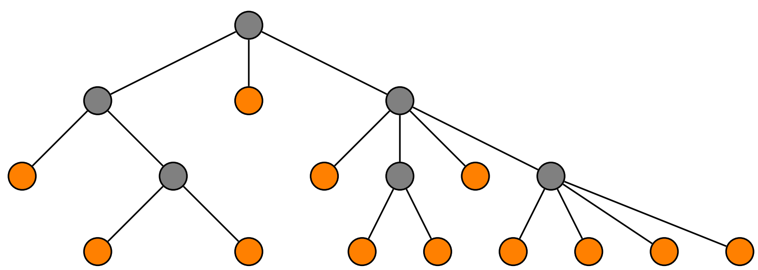
Portanto, a solução geral da relação de recorrência é da forma $b_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Os valores de α e β podem ser facilmente calculados usando as condições iniciais:

$$\begin{cases} 1 = b_0 = \alpha + \beta \\ 1 = b_1 = 2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Em conclusão,

$$b_n = \frac{2}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

8. Podemos modelar em cada instante a evolução da população de células por uma árvore, onde o primeiro vértice (a raiz) tem grau 3, os vértices terminais (as folhas) têm grau 1 e os vértices restantes (vértices internos) têm grau 3 ou 5.



Note que as folhas da árvore dão-nos o número total de células existentes na cultura nesse instante.

A árvore tem 1 vértice (a raiz) de grau 3, mais k vértices de grau 3, p vértices de grau 5 e 102 vértices de grau 1. Queremos saber os valores máximos e mínimos possíveis para k e p.

O número v de vértices é igual a $1 + k + p + 102$ pelo que o número a de arestas é igual a $k + p + 102$ (recorde que numa árvore, $a = v - 1$). Por outro lado, a soma dos graus dos v vértices é igual a $3 + 3k + 5p + 102$. Como num grafo a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas, então $3 + 3k + 5p + 102 = 2(k + p + 102)$. Logo $k + 3p = 99$, ou seja, $k = 99 - 3p$. Como k e p são inteiros não negativos,

$$k \in [0, 99] \quad \text{e} \quad p \in [0, 33]$$

(o valor máximo de k é 99, correspondente a $p = 0$, valor mínimo de p, e o valor máximo de p é 33, correspondente a $k = 0$, valor mínimo de k). Portanto, os valores extremos pedidos são 0 divisões em 2 células e 33 divisões em 4 células ou 99 divisões em 2 células e 0 divisões em 4 células.