Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 1h15m **Teste A1 - Soluções** 22/10/2013

Nome completo:

Número de estudante:

Este teste tem 4 questões. Responda apenas ao que lhe é pedido nos lugares indicados para o efeito.
Nas questões de escolha múltipla, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação** *(desde que a nota do teste permaneça não negativa).*

---

1. (a) Preencha a seguinte tabela de verdade, indicando todos os valores relativos aos conectivos $\rightarrow, \wedge, \vee$ e $\leftrightarrow$:

p	q	r	$\neg p$	$\wedge$	$(q \rightarrow \neg r)$	$\vee$	$((p \leftrightarrow r)$	$\wedge$	$(p \wedge \neg r))$
V	V	V		F	F	F	V	F	F
V	V	F		F	V	F	F	F	V
V	F	V		F	V	F	V	F	F
V	F	F		F	V	F	F	F	V
F	V	V		F	F	F	F	F	F
F	V	F		V	V	V	V	F	F
F	F	V		V	V	V	F	F	F
F	F	F		V	V	V	V	F	F

(b) Determine a forma normal disjuntiva que corresponde a esta tabela de verdade:

$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

[porque a fórmula original dá precisamente V nos 3 casos $(p, q, r) = (\mathsf{F}, \mathsf{V}, \mathsf{F})$ ou $(p, q, r) = (\mathsf{F}, \mathsf{F}, \mathsf{V})$ ou $(p, q, r) = (\mathsf{F}, \mathsf{F}, \mathsf{F})$.]

2. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes:
(**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa) **V F**

(a) *Sabe-se que ontem usei calças azuis ou camisa verde. Além disso há a informação segura de que ontem usei calças azuis. Logo não usei camisa verde.* [ ] [×]

[porque a dedução corresponde à implicação $(p \vee q) \wedge p \rightarrow \neg q$ que não é uma tautologia.]

(b) *p é uma condição suficiente para q. Verifica-se p ou a negação de r. Não se verifica q. Logo não se verifica r.* [×] [ ]

[porque a dedução corresponde à implicação $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge \neg q \rightarrow \neg r$ que é uma tautologia.]

3. (a) Avalie da verdade ou falsidade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo, preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

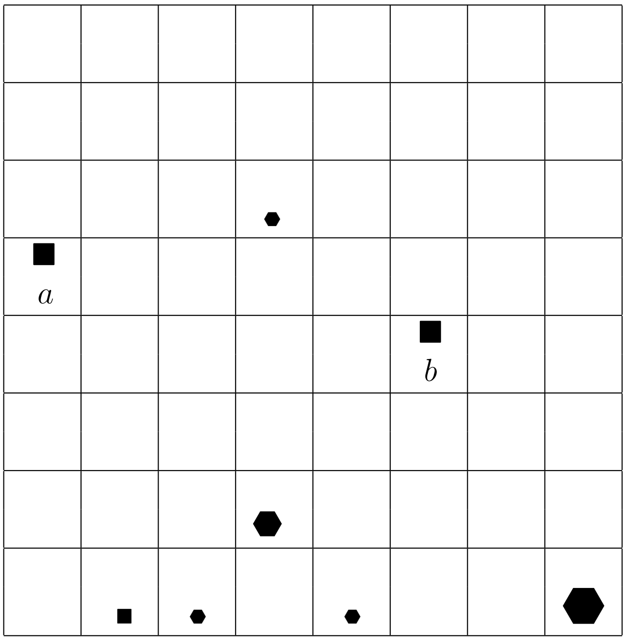
Sentenças	**Mundo A**	**Mundo B**
$Dodec(b) \to (Dodec(a) \lor Large(a))$	V	F
$\neg(Cube(a) \land Cube(b))$	F	V
$\forall x((Cube(x) \land RightOf(b,x)) \to Small(x))$	F	V
$\exists y \forall x(Dodec(x) \to RightOf(x,y))$	V	F
$\exists x[Cube(x) \land \forall y(Dodec(y) \to \exists z(z \neq y \land (SameRow(z,y) \lor RightOf(z,x))))]$	V	V

(b) O que precisa de mudar em **A** e **B** para que as 3 primeiras fórmulas sejam <u>todas</u> verdadeiras?

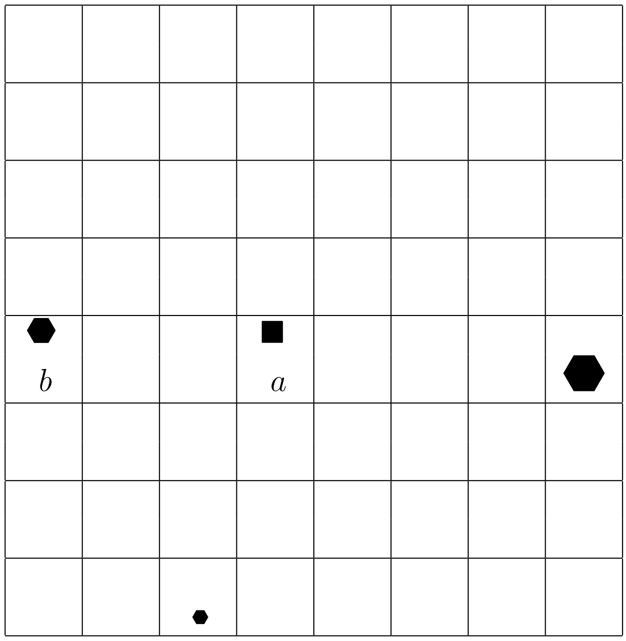
Mundo A: Basta mudar a forma de a (ou alternativamente mudar a forma de b para um tetraedro e o tamanho de a para pequeno).

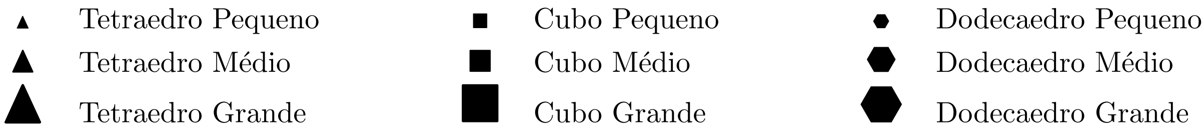
Mundo B: Basta mudar a forma de b para um tetraedro (ou alternativamente mudar a forma de a para um dodecaedro ou o seu tamanho para grande).

Mundo A



Mundo B





4. Prove, usando o método de indução matemática, que para qualquer natural n, a soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é igual a n^2:

Seja $P(n)$ a identidade

$$\underbrace{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}_{n \text{ parcelas}} = n^2.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $P(1)$ é V:

É óbvio, pois a identidade $P(1)$ resume-se a $1 = 1^2$.

(2) A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2.$$

Então

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2,$$

o que mostra precisamente que $P(k+1)$ também é V.