Ano lectivo 2014/15 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 6/02/2015

Nas questões 2 e 3, de escolha múltipla, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor. Nas questões restantes,justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h30m

---

1. (a) Quando é que duas fórmulas bem formadas da lógica de proposições se dizem *logicamente equivalentes*?
   (b) Calcule a tabela de verdade da fórmula $(p \to q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \to (\neg p \wedge r)$.
   (c) Indique se se trata de uma fórmula logicamente equivalente a $p \vee \neg p$.

2. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa):

	V	**F**
(a) De $p \vee q$ e $\neg p$ deduz-se q.		
(b) De $p \vee q$ e q deduz-se $\neg p$.		
(c) De $\neg(p \wedge q)$ deduz-se $\neg q$.		
(d) De $p \vee q$ e $q \to r$ deduz-se $p \vee r$.		
(e) De $p \to q$ e $q \to r$ deduz-se $\neg p \wedge r$.		

3. Indique, com uma cruz, <u>todas</u> as traduções correctas (na linguagem da lógica de primeira ordem do Tarski) das seguintes sentenças:

   (a) **a está na mesma coluna que b, exceptuando se forem ambos cubos.**

   ☐ $SameCol(a,b) \wedge Cube(a) \wedge Cube(b)$ ☐ $SameCol(a,b) \vee (Cube(a) \wedge Cube(b))$
   ☐ $SameCol(a,b) \vee Cube(a) \wedge Cube(b)$ ☐ $(\neg Cube(a) \vee \neg Cube(b)) \to SameCol(a,b)$

   (b) **Não é verdade que a seja um cubo pequeno.**

   ☐ $\neg(Cube(a) \vee Small(a))$ ☐ $\neg Cube(a) \vee \neg Small(a)$
   ☐ $\neg Cube(a) \wedge \neg Small(a)$ ☐ $\neg(Cube(a) \wedge Small(a))$

4. Determine:
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{3} 2i(j+1)$.
   (b) $\mathrm{mdc}(28,6)$, usando o algoritmo de Euclides.
   (c) os valores de n $(n>1)$ para os quais o grafo completo K_n é euleriano. E semi-euleriano?
   (d) quantas sequências de 6 letras podemos formar, com um alfabeto com 11 consoantes e 4 vogais, que contenham exactamente duas vogais.

5. Seja G um grafo com a seguinte matriz de incidência:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Escreva a matriz de adjacência de G.

6. Descodifique a mensagem "GUO IQOQIMFQ", que foi encriptada com a função

$$f(p) = (3p + 3) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \ldots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

7. Em cada passo de um determinado algoritmo, o valor de uma variável inteira s aumenta em 1500 unidades.

   (a) Determine uma relação de recorrência para o valor $s(n)$ dessa variável no final do passo n.

   (b) Qual era o valor inicial de s se, 50 passos após se ter iniciado o algoritmo, o valor de s for igual a 95 000?

8. Considere a sucessão definida recursivamente por

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(n) = 2f(n-1) + f(n-2) \quad (n \geq 2).$$

   (a) Determine $f(3)$ e $f(6)$.

   (b) Mostre que para todo o $n \geq 1$ se verifica a igualdade $f(3n) = 5f(3n-2) + 2f(3n-3)$.

   (c) Prove, usando o princípio de indução matemática, que $f(3n)$ é múltiplo de 5 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

9. Considere o algoritmo seguinte que, dado um inteiro n positivo, permite determinar a sua expansão na base b.

```
procedure expansão base b (n: inteiro positivo)
q := n
k := 0
while q ≠ 0
begin
  a_k := q mod b
  q := ⌊q/b⌋
  k := k + 1
end {a expansão de n na base b é o número a_{k-1} ··· a_1 a_0 }
```

   (a) Calcule a expansão na base 8 do número 12345, seguindo este algoritmo passo a passo.

   (b) Determine a complexidade do algoritmo em termos do número de divisões inteiras efectuadas.