

Nas questões **2(a)** e **3** de escolha múltipla, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h00m

1. Seja p a proposição “Sou responsável”, q a proposição “Passo a Estruturas Discretas” e r a proposição “Vou de férias para as Bermudas”. Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.












- (a) Se passar a Estruturas Discretas, vou de férias para as Bermudas.
- (b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.
- (c) Passo a Estruturas Discretas só se for responsável.
- (d) Para passar a Estruturas Discretas é necessário que eu seja responsável.
- (e) Se passar a Estruturas Discretas então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

2. (a) Indique o valor de verdade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo (V: verdade, F: falso):







- (1) $\neg(\text{Tet}(a) \rightarrow \exists x \text{Smaller}(x, a))$ (2) $\forall x (\neg\text{SameShape}(x, b) \leftrightarrow \text{Smaller}(x, b))$
- (3) $\forall x \exists y (x \neq y \wedge \text{SameRow}(x, y))$ (4) $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \text{Smaller}(x, y) \vee \text{Smaller}(y, x))$
- (5) $\forall x \forall y \exists z (\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y) \rightarrow \text{Between}(z, x, y))$










(b) Em (3) e (5), nos casos de sentenças falsas, apresente um contra-exemplo.

Mundo A

								
			a					
								
	c				b			
								
g								
								
		d		e		f		

Mundo B

								
	d		e		f			
								
	c				a			
								
			b					

- | | | |
|---|--|--|
|  Tetraedro Pequeno |  Cubo Pequeno |  Dodecaedro Pequeno |
|  Tetraedro Médio |  Cubo Médio |  Dodecaedro Médio |
|  Tetraedro Grande |  Cubo Grande |  Dodecaedro Grande |

3. Indique a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes

(V: dedução válida, F: dedução falaciosa):

V F

(a) De $\text{Small}(a) \rightarrow (\forall x \text{Cube}(x) \rightarrow \exists y \neg \text{Tet}(y))$ e $\text{Small}(a) \wedge \forall x \text{Cube}(x)$ deduz-se que $\exists y \neg \text{Tet}(y)$.

(b) De $\neg p \vee q$ e $\neg p$ deduz-se q .

(c) De $\neg(p \rightarrow q)$ deduz-se $p \wedge \neg q$.

(d) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$
 $\equiv (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r)$
 $\equiv p \wedge \neg q \wedge r$.

4. Escreva as seguintes expressões sob forma de um somatório:

(a) $\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{8}x^9 + \frac{1}{10}x^{11} + \frac{1}{12}x^{13} + \frac{1}{14}x^{15} + \frac{1}{16}x^{17}$.

(b) $\frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} + \frac{3}{k+2} + \dots + \frac{k+1}{2k}$.

(c) $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{7}{x^6}$.

(d) $x + \frac{1}{2x} + 3x + \frac{1}{4x} + 5x + \frac{1}{6x} + 7x + \frac{1}{8x} + 9x + \frac{1}{10x}$.

5. Calcule os seguintes somatórios:

(a) $\sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{11} (-1)^i 2j$.

(b) $\sum_{i=1}^{99} \sum_{j=1}^{50} (j(\cos(i\pi) - \cos((i-1)\pi)))$.

6. Prove, usando o método de indução matemática, que para qualquer natural n ,

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}.$$

7. Descubra uma fórmula, e prove-a por indução, para $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

8. Considere um grafo G , com 5 vértices e 8 arestas, com a seguinte matriz de incidência (onde alguns dos valores estão representados pelas letras a, b, c, d, e):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Escreva a matriz de adjacência de G no caso em que $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, e = 0$.

(b) Se G for um grafo simples, qual é o único valor possível para a ? E quais são os valores possíveis para b, c, d, e ? Para quais desses valores é que G tem exactamente 4 vértices de grau 3?