Ano lectivo 2014/15 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 12/11/2014

Nas questões **2(a)** e **3** de escolha múltipla, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. (a) $q \to r$
   (b) $p \to r$
   (c) $q \to p$
   (d) $q \to p$
   (e) $q \to (p \to r)$

2. (a)

	Mundo A	Mundo B
1.	F	F
2.	F	V
3.	V	F
4.	F	V
5.	F	F

   (b) A fórmula 3 no Mundo B falha para $x = b$ (este é o único contra-exemplo pois é o único objecto que não se encontra acompanhado na sua linha).

   A fórmula 5 no Mundo B falha para $\{x, y\} = \{d, e\}$. No mundo A falha para vários pares de objectos x, y; por exemplo, $x = d$ e $y = e$.

3. (a) V
   (b) F
   (c) V
   (d) V

4. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{2i}\, x^{2i+1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{i+1}{k+i}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} (-1)^i\, \frac{i+1}{x^i}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (ix)^{((-1)^{i+1})}$.

5. (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{11}(-1)^i\,2j = 2\sum_{i=0}^{5}\left((-1)^i\sum_{j=0}^{11} j\right) = 2\sum_{i=0}^{5}\left((-1)^i\sum_{j=1}^{11} j\right) = 2\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\,\frac{11\times 12}{2} =$

$\displaystyle = 11\times 12\sum_{i=0}^{5}(-1)^i = 11\times 12\times(1-1+1-1+1-1)=0.$

Solução alternativa:

$\displaystyle\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{11}(-1)^i\,2j = \sum_{i=0}^{5}\left((-1)^i\sum_{j=0}^{11} 2j\right) = \sum_{j=0}^{11}2j-\sum_{j=0}^{11}2j+\sum_{j=0}^{11}2j-\sum_{j=0}^{11}2j+\sum_{j=0}^{11}2j-\sum_{j=0}^{11}2j = 0.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{99}\sum_{j=1}^{50}\Big(j\big(\cos(i\pi)-\cos((i-1)\pi)\big)\Big) = \sum_{i=1}^{99}\Big(\big(\cos(i\pi)-\cos((i-1)\pi)\big)\sum_{j=1}^{50} j\Big) =$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{99}\big(\cos(i\pi)-\cos((i-1)\pi)\big)\frac{50\times 51}{2} = 25\times 51\sum_{i=1}^{99}\big(\cos(i\pi)-\cos((i-1)\pi)\big) =$

$= 25\times 51\,(\cos(99\pi)-\cos 0) = 25\times 51\times(-2) = -50\times 51 = -2550.$

6. Seja $P(n)$ a identidade

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer natural n. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $P(1)$ é V:

É evidente, pois $1+\frac{1}{3}\geq 1+\frac{1}{3}$.

(2) A implicação $P(k)\to P(k+1)$ é V para qualquer $k\geq 1$:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^k \geq 1+\frac{k}{3}.$$

Então,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{3}\right)^k\left(1+\frac{1}{3}\right) \geq \left(1+\frac{k}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = 1+\frac{1}{3}+\frac{k}{3}+\frac{k}{9} > 1+\frac{1}{3}+\frac{k}{3} = 1+\frac{k+1}{3}$$

o que mostra precisamente que $P(k+1)$ também é V.

7. Façamos o cálculo para os primeiros valores de n:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&7\\0&8\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}1&15\\0&16\end{bmatrix}.$$

Isto leva-nos à conjectura

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{bmatrix}$$

que pode ser confirmada pelo método de indução.

Seja $P(n)$ esta identidade. Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer natural n. Já sabemos que $P(1)$ é V (bem como $P(2), P(3)$ e $P(4)$).

Resta-nos verificar que

a implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{k+1} - 2 + 1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

o que mostra precisamente que $P(k+1)$ também é V.

8. (a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Se G for um grafo simples, não havendo lacetes, então necessariamente $a = 1$.

A matriz de incidência de qualquer grafo é uma matriz binária. Uma vez que num grafo simples não há lacetes, a soma dos elementos em cada coluna da sua matriz de incidência é igual a 2. Então $b+c+d+e = 2$, sendo portanto dois destes números iguais a um e os restantes nulos. Há então 6 possibilidades para os valores de b, c, d, e: $(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$. Mas também não existem arestas múltiplas, pelo que as hipóteses correspondentes às três últimas colunas (arestas) da matriz de incidência terão que ser excluídas. Restam assim 3 hipóteses diferentes para (b, c, d, e):

$$(1,1,0,0), \quad (0,1,1,0), \quad (0,0,1,1).$$

São estes os valores possíveis para b, c, d, e no caso de G ser um grafo simples.

Finalmente, como o grau de cada vértice é igual à soma dos elementos na linha da matriz de incidência correspondente a esse vértice e o primeiro vértice de G tem grau 4, é evidente que só no caso $(b, c, d, e) = (0, 1, 1, 0)$ é que G tem 4 vértices de grau 3.