

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

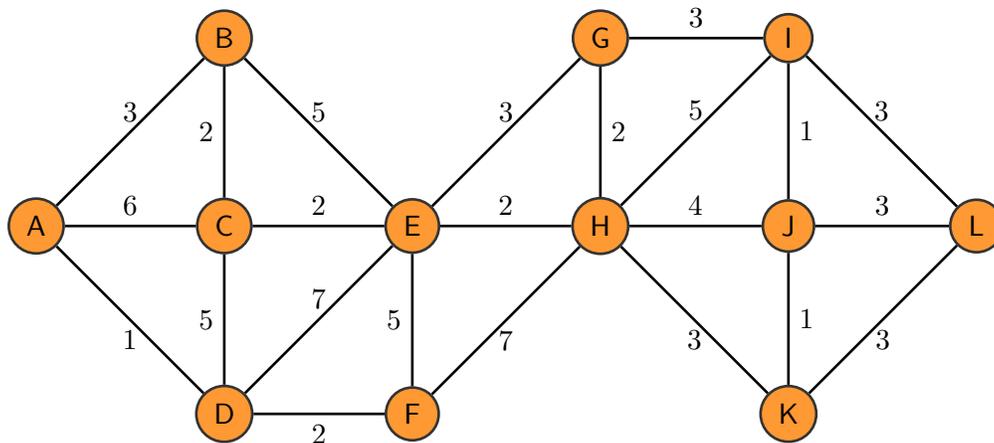
Duração: 2h30m

1. Um estudo de opinião revela que 115 estudantes gostam de Análise (A), Estruturas Discretas (E) ou Álgebra Linear (L), indicando o número específico dessas preferências na tabela seguinte:

A	E	L	A+E	A+L	E+L	A+E+L
52	65	53	25	16	31	12

Será que o estudo apresenta os resultados de forma correcta?

2. Usando o algoritmo de Dijkstra (explicitando os passos essenciais), determine o caminho mais curto de A para os vértices I e L no grafo seguinte:



3. Determine:

- O máximo divisor comum de 1112 e 144 (usando o algoritmo de Euclides).
- Um número natural n tal que $n \equiv_6 3$ e $n \equiv_8 5$.
- O número de seqüências binárias de comprimento $2n$ nas quais as n primeiras entradas são iguais a 1.
- O número de seqüências binárias de comprimento $2n$ nas quais o número de zeros é igual ao número de uns.

(e)
$$\binom{2014}{1} + \binom{2014}{2} + \binom{2014}{3} + \cdots + \binom{2014}{2011} + \binom{2014}{2012} + \binom{2014}{2013}.$$

4. Descodifique a mensagem ELRGNRF, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (3p + 4) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto com os inteiros $0, 12, \dots, 22$ (como mostra a tabela).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

5. A solução abaixo do seguinte problema está errada. Explique onde está o erro.

Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Em primeiro lugar escolhemos 3 homens para a comissão, o que pode ser feito de $C(5, 3) = 10$ modos diferentes. Em seguida devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $C(6, 2) = 15$ modos diferentes. Então, pelo Princípio da Multiplicação, a resposta é $10 \times 15 = 150$.

6. Seja G uma árvore com 8 vértices.

(a) Diga, justificando sucintamente, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(i) G pode ter todos os vértices com grau 2.

(ii) G pode ter dois vértices de grau 5.

(iii) G pode ter um vértice de grau 8.

(iv) G pode ter dois vértices de grau 4.

(b) Quantos vértices de grau 3 terá G se só tiver vértices de grau 1 ou de grau 3?

7. Um corpo eleitoral de 35 pessoas é chamado a votar (por voto secreto) em 5 candidatos para a presidência da Associação dos Amigos das Ervas Daninhas. Não são permitidas abstenções, mas é possível votar em branco. Quantas são as possibilidades para o resultado final do escrutínio?

8. Considere *passwords* de comprimento n , formadas com as letras A, B, C, contendo exatamente r A's, s B's e t C's ($r + s + t = n$).

(a) Qual é o menor valor possível para n de modo a podermos ter pelo menos 27 *passwords* diferentes? Quais são os valores de r, s e t nesse caso?

(b) E se tivermos a restrição adicional $r = s = t$, qual é o menor valor possível para n ?