Ano lectivo 2014/15 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 17/12/2014

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. Não, pelo princípio da inclusão-exclusão o número 115 de estudantes deveria coincidir com a soma

$$|A| + |E| + |L| - |A \cap E| - |A \cap L| - |E \cap L| + |A \cap E \cap L| = 52 + 65 + 53 - 25 - 16 - 31 + 12 = 110.$$

2. Iterando o algoritmo de Dijkstra obtemos:

Vértices	Etiquetas temporárias	Etiq. definitivas
A	0 (A)	0 (A)
B	3 (AB)	3 (AB)
C	~~6 (AC)~~ 5 (ABC)	5 (ABC)
D	1 (AD)	1 (AD)
E	~~8 (ADE)~~ 7(ABCE)	7 (ABCE)
F	3 (ADF)	3 (ADF)
G	10 (ABCEG)	10 (ABCEG)
H	~~10 (ADFH)~~ 9 (ABCEH)	9 (ABCEH)
I	~~14 (ABCEHI)~~ 13 (ABCEGI)	13 (ABCEGI)
J	13 (ABCEHJ)	13 (ABCEHJ)
K	12 (ABCEHK)	12 (ABCEHK)
L	15 (ABCEHKL)	15 (ABCEHKL)

3. (a) Usando o algoritmo de Euclides:

$$1112 = 7 \times 144 + 104$$

$$144 = 1 \times 104 + 40$$

$$104 = 2 \times 40 + 24$$

$$40 = 1 \times 24 + 16$$

$$24 = 2 \times 16 + \boxed{8}$$

$$16 = 2 \times 8 + 0.$$

Portanto, $\text{mdc}(1112, 144) = 2^3 = 8$.

(b) Da definição da relação de congruência decorre que

$$n \equiv_6 3 \Leftrightarrow n \in \{6k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad n \equiv_8 5 \Leftrightarrow n \in \{8k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Basta então encontrar um número natural que esteja em ambos os conjuntos. Por exemplo, o 21:

$$3 \xrightarrow[+6]{} 9 \xrightarrow[+6]{} 15 \xrightarrow[+6]{} \boxed{21} \xrightarrow[+6]{} 27 \xrightarrow[+6]{} \cdots$$

$$5 \xrightarrow[+8]{} 13 \xrightarrow[+8]{} \boxed{21} \xrightarrow[+8]{} 29 \xrightarrow[+8]{} \cdots$$

(c) É igual ao número de sequências binárias de comprimento n, ou seja, $\overline{P}(2,n) = 2^n$.

(d) É igual ao número de maneiras diferentes de escolhermos o conjunto das n entradas onde vamos colocar os zeros (os uns ficam automaticamente colocados nas restantes n posições), ou seja,

$$C(2n,n) = \frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

(e) Como $(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$, então

$$\sum_{r=1}^{2013} \binom{2014}{r} = (1+1)^{2014} - \binom{2014}{0} - \binom{2014}{2014} = 2^{2014} - 2.$$

4. Cálculo da função de desencriptação:

$$q = f(p) = (3p+4) \bmod 23 \quad \Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 3p+4 \quad \Leftrightarrow \quad q-4 \equiv_{23} 3p \quad \Leftrightarrow \quad 8(q-4) \equiv_{23} p.$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 8(q-4) \bmod 23$. Logo:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mathsf{E}) &= f^{-1}(4) = 0 \bmod 23 = 0 = \mathsf{A}\\
f^{-1}(\mathsf{L}) &= f^{-1}(10) = 48 \bmod 23 = 2 = \mathsf{C}\\
f^{-1}(\mathsf{R}) &= f^{-1}(16) = 96 \bmod 23 = 4 = \mathsf{E}\\
f^{-1}(\mathsf{G}) &= f^{-1}(6) = 16 \bmod 23 = 16 = \mathsf{R}\\
f^{-1}(\mathsf{N}) &= f^{-1}(12) = 64 \bmod 23 = 18 = \mathsf{T}\\
f^{-1}(\mathsf{F}) &= f^{-1}(5) = 8 \bmod 23 = 8 = \mathsf{I}.
\end{aligned}$$

Mensagem original: A C E R T E I !

5. O uso do princípio da multiplicação não está correcto pois as segundas escolhas são feitas num conjunto que contém elementos que pertencem também ao conjunto onde são feitas as primeiras escolhas, o que significa que este processo de contagem conta várias comissões mais do que uma vez. Por exemplo, se a combinação de homens escolhida inicialmente for $\{H_1, H_2, H_3\}$ e de seguida escolhermos $\{H_4, H_5\}$ obtemos a comissão $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$; mas a escolha inicial $\{H_1, H_4, H_5\}$ e depois $\{H_2, H_3\}$ resulta na mesma comissão pelo que não deveria ser contada novamente.

6. Em qualquer árvore com n vértices, $\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2(n-1)$, onde cada $g(v_i) \geq 1$. Logo, em G,

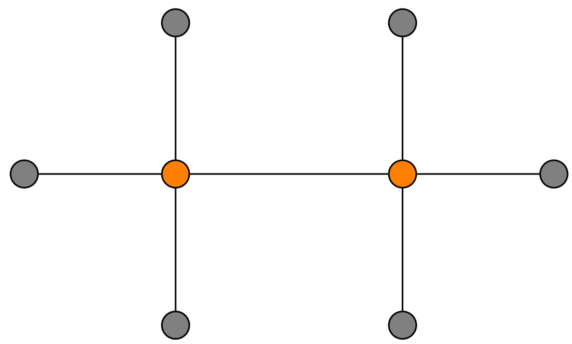
$$\sum_{i=1}^{8} g(v_i) = 14.$$

(a) (i) Falsa, pois $\sum_{i=1}^{8} 2 = 2 \times 8 = 16$.

(ii) Falsa, pois nesse caso $\sum_{i=1}^{8} g(v_i) \geq 5 + 5 + 6 = 16$.

(iii) Falsa, pois nesse caso $\sum_{i=1}^{8} g(v_i) \geq 8 + 7 = 15$.

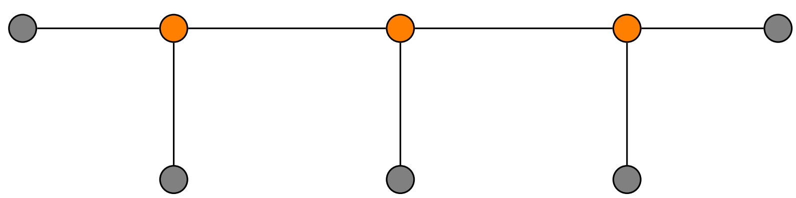
(iv) Verdadeira, pois existe uma árvore com oito vértices, dois de grau 4 e seis de grau 1:



(b) Seja x o número de vértices de grau 3 e y o número de vértices de grau 1. Então

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = 3$ e $y = 5$ que corresponde à árvore



7. Uma possibilidade para o escrutínio final é 7 votos no candidato A, 3 votos em branco (B), 0 votos no candidato C, 10 votos no candidato D, 5 votos no candidato E e 10 votos no candidato F, que esquematicamente podemos representar por (7, 3, 0, 10, 5, 10) . Assim, o que se pretende contar é o número de maneiras diferentes de distribuir 35 elementos indistintos (os votantes) por 6 "caixas" distintas (os 5 candidatos e o voto em branco). Trata-se então da contagem de multiconjuntos. Por exemplo, o escrutínio referido corresponde ao multiconjunto

$$\{7 \cdot A, 3 \cdot B, 0 \cdot C, 10 \cdot D, 5 \cdot E, 10 \cdot F\}.$$

Assim, o número total de escrutínios é igual ao número de combinações com repetição de 6 elementos, 35 a 35:

$$\overline{C}(6, 35) = C(40, 35) = \frac{40!}{35!\,5!} = 658008.$$

8. (a) Vejamos primeiro um exemplo concreto do tipo de permutações (passwords) que queremos contar: quantas passwords de comprimento 4, formadas com as letras $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$, têm um A, dois B's e um C ?

Escrever uma password destas significa escolher o lugar onde colocar o A (temos $C(4, 1)$ maneiras distintas de fazer isto) e escolher depois, entre os três lugares restantes, os dois onde colocar os B's (temos $C(3,2)$ maneiras distintas de o fazer). Claro que depois já não temos mais nenhuma escolha: colocamos o C no lugar sobrante. Em conclusão, o número total é igual a

$$C(4,1) \times C(3,2) = \frac{4!}{2!} = 12.$$

É agora evidente que no caso geral de permutações de comprimento n, formadas com as letras A, B, C, com r A's, s B's e t C's, o número é dado por

$$C(n,r) \times C(n-r,s) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \times \frac{(n-r)!}{(n-r-s)!\,s!} = \frac{n!}{r!\,s!\,t!}.$$

Temos então que resolver a inequação

$$\frac{n!}{r!\,s!\,t!} \geq 27$$

para o menor valor de $n = r + s + t$. Por tentativa e erro: $n = 4$ não é claramente solução, mas $n = 5$ é, basta fazer dois dos três números r, s, t iguais a 2 e o outro igual a 1:

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = \frac{5 \times 4 \times \times 3}{2} = 30 \geq 27.$$

(b) Neste caso, o número de passwords é igual a $\frac{n!}{(r!)^3}$ com $n = 3r$. Portanto, n é múltiplo de 3 e a inequação $\frac{n!}{(r!)^3} \geq 27$ tem então como menor solução $n = 6$ (donde $r = 2$).
