Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 1h15m **Teste 1A - Soluções** 22/10/2014

Nome completo:

Número de estudante:

Este teste tem 4 questões. Responda apenas ao que lhe é pedido nos lugares indicados para o efeito.
Nas questões 2 e 3(a), uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação** *(desde que a nota do teste permaneça não negativa).*

---

1. Prove que

$$\begin{array}{c} a \vee c \\ b \vee \neg c \\ \hline \therefore \;\; a \vee b \end{array}$$

(a) usando uma tabela de verdade (indicando <u>todos</u> os valores relativos aos conectivos):

a	b	c	$(a \vee c)$	$\wedge$	$(b \vee \neg c)$	$\rightarrow$	$(a \vee b)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V	F

(b) por contradição, isto é, assuma $\neg(a \vee b)$ e mostre que daí resulta uma contradição com as premissas.

Queremos mostrar, usando uma prova por contradição, que se $a \vee c$ e $b \vee \neg c$ forem verdadeiras então $a \vee b$ também é.
Suponhamos então, por absurdo, que $\neg(a \vee b)$ era verdadeira, isto é, $a \vee b$ era falsa. Então a e b eram simultaneamente falsas, o que implicaria na primeira premissa que c fosse verdadeira e na segunda que $\neg c$ também fosse verdadeira, o que é um absurdo pelo princípio da não contradição.
Em conclusão, $a \vee b$ é necessariamente verdadeira quando as premissas o são.

Solução alternativa:
$$\begin{aligned} (a \vee c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge \neg(a \vee b) &\equiv (a \vee c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge \neg a \wedge \neg b \\ &\equiv (a \vee c) \wedge \neg a \wedge (b \vee \neg c) \wedge \neg b \\ &\equiv \; (\mathsf{F} \vee c \wedge \neg a) \wedge (\mathsf{F} \vee \neg c \wedge \neg b) \\ &\equiv c \wedge \neg a \wedge \neg c \wedge \neg b \equiv \mathsf{F}. \end{aligned}$$

2. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes:

   (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa) **V** **F**

   (a) *Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.* [ ] [×]

   [porque a dedução corresponde à implicação $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$ que <u>não é</u> uma tautologia.]

   (b) *Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.* [×] [ ]

   [porque a dedução corresponde à implicação $(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p \to \neg q$ que <u>é</u> uma tautologia.]

   (c) *r é uma condição suficiente para q. Verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.* [×] [ ]

   [porque a dedução corresponde à implicação $(r \to q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg q \to \neg p$ que <u>é</u> uma tautologia.]

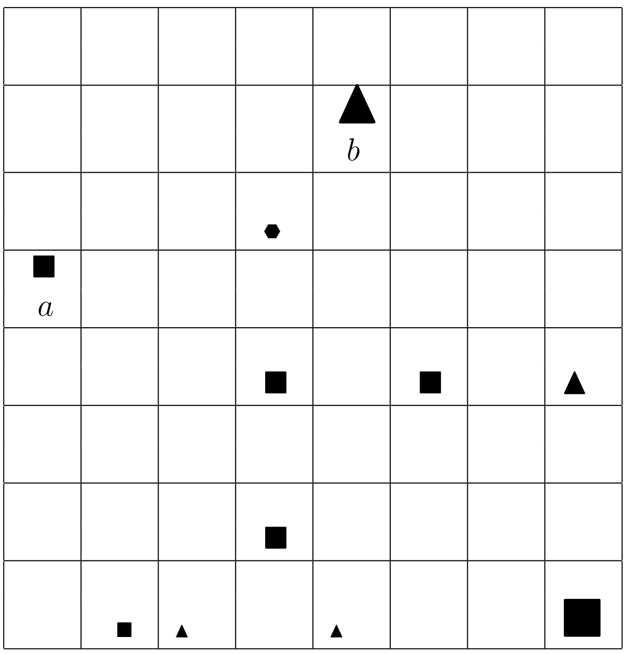
3. (a) Avalie da verdade ou falsidade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo, preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	**Mundo A**	**Mundo B**
1. $\neg(Cube(a) \vee Small(a))$	F	V
2. $Cube(a) \to BackOf(a,b)$	F	V
3. $\neg\,(\forall x\,(Cube(x) \vee Tet(x) \vee Small(x)))$	F	V
4. $\forall x\,\forall y\,\forall z((Cube(x) \wedge Between(x,y,z)) \to \neg SameSize(y,z))$	F	F
5. $\exists x\,\exists y\,\forall z\,(Dodec(z) \leftrightarrow z = x \vee z = y)$	V	F

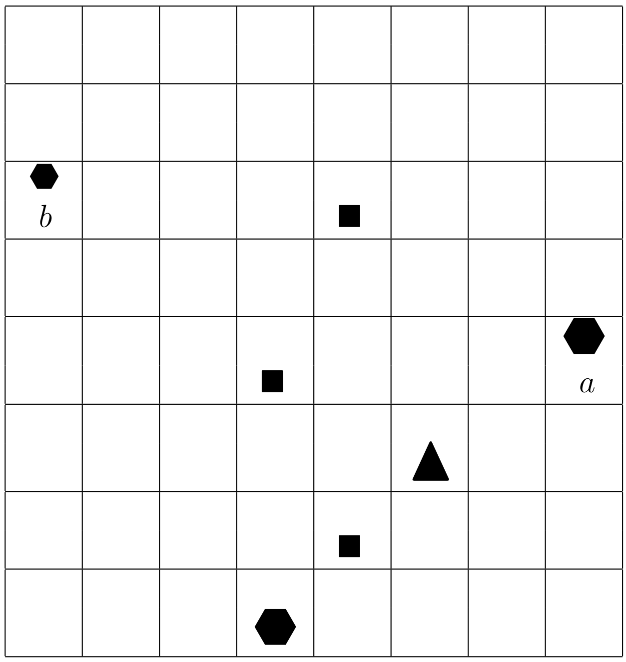
   (b) Traduza a fórmula 4 para Português:

   Se um cubo está entre dois objectos, então estes têm tamanhos diferentes.

Mundo A



Mundo B



▲	Tetraedro Pequeno	■	Cubo Pequeno	⬢	Dodecaedro Pequeno
▲	Tetraedro Médio	■	Cubo Médio	⬢	Dodecaedro Médio
▲	Tetraedro Grande	■	Cubo Grande	⬢	Dodecaedro Grande

4. Prove, <u>usando o método de indução matemática</u>, que para qualquer natural $n \geq 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}.$$

Seja $P(n)$ a identidade

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n-1 \text{ factores } (n\geq 2)}=\frac{1}{n}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer natural $n \geq 2$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) <u>$P(2)$ é V</u>:

É evidente, pois $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2) <u>A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 2$</u>:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}.$$

Então

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\left(1-\frac{1}{k+1}\right) &= \frac{1}{k}\times\left(1-\frac{1}{k+1}\right) \qquad \text{(hip. de indução)}\\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \frac{k+1-1}{k(k+1)}\\ &= \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

o que mostra precisamente que $P(k+1)$ também é V.