Ano lectivo 2015/16 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 5/02/2016

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h30m

---

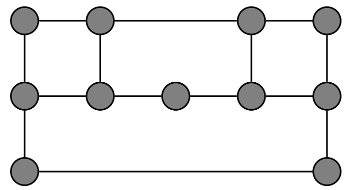
1. Defina tautologia e mostre que a fórmula $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ é uma tautologia:
   (a) usando tabelas de verdade.
   (b) sem usar tabelas de verdade.

2. Considere a fórmula
$$\exists x \, \forall y \; (\neg SameShape(y, x) \rightarrow RightOf(y, x)).$$
   (a) Num mundo onde esta fórmula seja verdadeira, o que é que pode concluir sobre os eventuais objectos que existam na mesma coluna ou à esquerda do objecto x que a fórmula assegura existir?
   (b) Simplifique
$$\neg \left[\exists x \, \forall y \; (\neg SameShape(y, x) \rightarrow RightOf(y, x))\right]$$
   de forma a que $\neg$ não apareça à esquerda dos quantificadores e sem usar o conectivo $\rightarrow$.

3. Indique, justificando, qual a alínea que contém a resposta certa ao seguinte problema:
   Um homem tem dez amigos. De quantas maneiras diferentes pode ele combiná-los em grupos de dois ou mais amigos?
   (a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} 10^i$;
   (b) 8;
   (c) $2^{10} - 11$;
   (d) $10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

4. Determine:
   (a) Todas as soluções da congruência $7x \equiv 14 \pmod{21}$ no conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 10\}$.
   (b) O número de cadeias binárias de 8 *bits* que começam por 10 e terminam em 01.
   (c) O número de cadeias binárias de 8 *bits* que começam por 10 e não terminam em 01.
   (d) O número de cadeias binárias de 8 *bits* que começam por 10 ou terminam em 01.

(e) O menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo seguinte de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel.



5. Considere a função $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$h(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ n(n+1) + h(n-1) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Calcule $h(4)$.

(b) Escreva a definição de $h(n)$ na forma de um somatório.

(c) Prove, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, que

$$h(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(i) usando propriedades dos somatórios (recorde que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

(ii) usando o método de indução matemática.

6. Num determinado algoritmo, o valor de uma variável t vai variando de acordo com a seguinte regra: em cada passo n ($n \geq 2$), o valor de t (que denotamos por t_n) é igual a

$$t_{n-2} - 2t_{n-1}.$$

(a) Sabendo que $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, enumere os primeiros 6 valores da sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(b) Determine uma fórmula de cálculo para o termo geral t_n dessa sequência.

7. Considere um grafo simples G, com 6 vértices, cujas matrizes de adjacência e incidência são iguais. Justificando convenientemente as suas respostas, indique se, necessariamente,

(a) G tem 12 arestas.

(b) G é regular.

(c) G é conexo.

(d) G é euleriano.