

Na questão 1(a) de escolha múltipla, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 2h00m

1. (a) Indique o valor de verdade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo

(V: verdade, F: falso):

(1) $\text{Dodec}(a) \rightarrow (\text{Tet}(b) \wedge \text{Tet}(c))$.

(2) $\exists x \forall y \text{ Smaller}(x, y)$.

(3) $\exists x \forall y (\text{Dodec}(y) \rightarrow \text{Smaller}(y, x))$.

(4) $\forall x (\text{Small}(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge \text{SameCol}(x, y)))$.

(5) $\forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Medium}(x)) \rightarrow \neg \exists y \text{ BackOf}(y, x))$.

(b) Em (2) e (3), nos casos de sentenças verdadeiras, apresente um exemplo que as confirme.

(c) Em (4) e (5), nos casos de sentenças falsas, apresente um contra-exemplo.

Mundo A

<i>d</i> 							
					<i>e</i> 		
<i>a</i> 		<i>b</i> 				<i>c</i> 	
							
							

Mundo B

	<i>d</i> 						
							<i>e</i> 
	<i>a</i> 						
				<i>b, c</i> 			
						<i>f</i> 	
							
							

▲ Tetraedro Pequeno
 ▲ Tetraedro Médio
 ▲ Tetraedro Grande

■ Cubo Pequeno
 ■ Cubo Médio
 ■ Cubo Grande

● Dodecaedro Pequeno
 ● Dodecaedro Médio
 ● Dodecaedro Grande

2. Considere as proposições

p : “Conduzes a uma velocidade superior a 120”.

q : “És multado”.

Traduza as frases seguintes para a linguagem da lógica proposicional usando p , q e os conectivos lógicos.

(a) Conduzes a uma velocidade superior a 120 mas não és multado.

(b) Se não conduzires a uma velocidade superior a 120, não és multado.

(c) Conduzires a uma velocidade superior a 120 é condição necessária para seres multado.

3. Determine: (a) $\sum_{j=-20}^{18} 2j$. (b) $\sum_{i=1}^{20} \sum_{j=0}^9 2i(j+1)$. (c) $\sum_{i=1}^{100} (10^i - 10^{i-1})$.

(d) O conjunto S definido indutivamente por

$$0 \in S, \quad x \in S \Rightarrow x + 3 \in S.$$

(e) Os valores de n ($n \geq 2$) para os quais o grafo completo K_n é euleriano. E semi-euleriano?

4. Considere a função $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ (2n + 1) + f(n - 1) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule $f(3)$.

(b) Prove que $f(n) = (n + 1)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$:

(i) usando o método de indução matemática.

(ii) usando propriedades dos somatórios.

5. Seja G um grafo com 5 vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , com a seguinte matriz de adjacência:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{a} & 0 & \mathbf{b} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{c} \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{c} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ de forma a que G seja um grafo:

(i) regular.

(ii) com 2 caminhos, de comprimento 2, a ligar v_2 a ele próprio.

(iii) simples e semi-euleriano.

(b) Em cada um dos casos acima, indique quantas arestas terá G .
