Na questão **1(a)** de escolha múltipla, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. (a)

	Mundo A	Mundo B
1.	V	F
2.	F	F
3.	V	F
4.	V	F
5.	F	V

(b) Só a fórmula 3 é verdadeira, no mundo A: qualquer objecto maior que o único dodecaedro (que é pequeno), ou seja, qualquer dos seus objectos médio ou grande é um exemplo que confirma a fórmula (por exemplo, o cubo d).

(c) A fórmula 4 falha no Mundo B, para $x = f$ (este é o único contra-exemplo pois é o único objecto pequeno que não se encontra acompanhado na sua coluna).

A fórmula 5 falha no Mundo A, para $x = a$ (é um contra-exemplo pois é um cubo médio e existem objectos atrás dele; é o único contra-exemplo pois é o único cubo médio).

2. (a) $p \wedge \neg q$.

(b) $\neg p \to \neg q$.

(c) $q \to p$.

3. (a) $$\sum_{j=-20}^{18} 2j = 2\sum_{j=-20}^{18} j = 2\sum_{j=1}^{39}(j-21) = 2\left(\sum_{j=1}^{39} j - \sum_{j=1}^{39} 21\right) = 2\left(\frac{39\times 40}{2} - 21\times 39\right) =$$

$$40\times 39 - 42\times 39 = -78.$$

<u>Solução alternativa</u>:

$$\sum_{j=-20}^{18} 2j = 2\sum_{j=-20}^{18} j = 2(-20-19-18-\cdots-1+0+1+\cdots+17+18) = 2(-20-19) = -78.$$

(b) $$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=0}^{9} 2i(j+1) = \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{10} 2ij = 2\sum_{i=1}^{20} i\left(\sum_{j=1}^{10} j\right) = 2\sum_{i=1}^{20} i\left(\frac{10\times 11}{2}\right) = 10\times 11\sum_{i=1}^{20} i$$

$$= 10\times 11\times \frac{20\times 21}{2} = 10\times 10\times 11\times 21 = 23\,100.$$

(c) $\sum_{i=1}^{100}(10^i - 10^{i-1}) = (\cancel{10}-1)+(\cancel{10^2}-\cancel{10})+(\cancel{10^3}-\cancel{10^2})+\cdots+(\cancel{10^{99}}-\cancel{10^{98}})+(10^{100}-\cancel{10^{99}}) =$

$10^{100}-1$.

(d) $S = \{0, 3, 6, 9, \ldots\} = \{$múltiplos não negativos de $3\}$.

Justificação: Seja C o conjunto de todos os múltiplos não negativos de 3. Para provar a igualdade $C = S$ temos que verificar as inclusões $C \subseteq S$ e $S \subseteq C$.

$C \subseteq S$: Provemos por indução matemática que todo o inteiro não negativo múltiplo de 3 pertence a S. Para isso seja $P(n)$ a proposição "$3n \in S$". O passo inicial $P(0)$ é verdadeiro pela primeira regra da definição recursiva. Para estabelecer o passo indutivo, assumimos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, que $3n \in S$. Mas então, pela segunda regra da definição recursiva, $3n + 3 = 3(n + 1)$ também está em S.

$S \subseteq C$: Basta mostrar que as regras de definição de S só geram elementos que estão contidos em C. A primeira é evidente: $0 \in C$. Quanto à segunda, se $x \in S$ é múltiplo de 3 então $x + 3$ também é múltiplo de 3, o que completa a prova.

(e) Como o grau de cada vértice em K_n é $n - 1$ e, pelo Teorema de Euler, um grafo conexo é euleriano se e só se todos os seus vértices tiverem grau par, concluímos que K_n é euleriano se e só se $n - 1$ é par, isto é, n é ímpar.

Um grafo é semi-euleriano se e só se tiver dois vértices de grau ímpar e os restantes de grau par. Como os grafos completos são regulares, a única possibilidade para que isso aconteça é não ter vértices de grau par e ter exactamente dois vértices, ou seja, o K_2.

4. (a) $f(3) = 7 + f(2) = 7 + 5 + f(1) = 7 + 5 + 3 + f(0) = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$.

(b) (i) Seja $P(n)$ a identidade

$$f(n) = (n + 1)^2.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $\underline{P(0) \text{ é } \mathsf{V}}$:

É evidente, pois $f(0) = 1 = (0 + 1)^2$.

(2) $\underline{\text{A implicação } P(k) \to P(k+1) \text{ é } \mathsf{V} \text{ para qualquer } k \geq 0}$:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$f(k) = (k + 1)^2.$$

Então,

$$f(k+1) = (2(k+1)+1)+f(k) = (2k+3)+(k+1)^2 = 2k+3+k^2+2k+1 = k^2+4k+4 = (k+2)^2$$

o que mostra precisamente que $P(k + 1)$ também é V.

(ii) Como

$$\begin{aligned} f(n) &= (2n+1) + f(n-1) \\ &= (2n+1) + (2n-1) + f(n-2) \\ &= (2n+1) + (2n-1) + (2n-3) + f(n-3) \\ &= (2n+1) + (2n-1) + \cdots + 5 + 3 + f(0) \\ &= (2n+1) + (2n-1) + \cdots + 5 + 3 + 1 \end{aligned}$$

então
$$f(n) = \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = 2\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= n(n+1) + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

5. (a) (i) G é regular se e só se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. Como decorre da matriz que

$$g(v_1) = a+2,\ g(v_2) = a+b,\ g(v_3) = b+2,\ g(v_4) = c+2,\ g(v_5) = c+2$$

então $a+2 = a+b$, ou seja, $b = 2$, pelo que $g(v_3) = 4$ e, consequentemente, também $a = 2$ e $c = 2$. Em conclusão: $a = b = c = 2$ e os vértices de G têm todos grau 4.

Soluções para $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$: $(2, 2, 2)$

(ii) O número de caminhos de comprimento 2 que ligam v_2 a v_2 é dado pelo elemento na posição $(2,2)$ do quadrado da matriz de adjacência. Este elemento resulta do produto da linha 2 pela coluna 2 da matriz, ou seja, $a^2 + b^2$. Portanto $a^2 + b^2 = 2$. Esta equação só tem uma solução nos inteiros: $a = b = 1$. Como não há nenhuma restrição para c, este poderá tomar qualquer valor.

Soluções para $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$: $(1, 1, c)$

(iii) Uma vez que num grafo simples não há arestas múltiplas, a, b, c terão que ser números binários (0 ou 1). Da primeira alínea, sabemos que

$$g(v_1) = a+2,\ g(v_2) = a+b,\ g(v_3) = b+2,\ g(v_4) = g(v_5) = c+2$$

pelo que para ser semi-euleriano, três destes números terão que ser pares ($\neq 0$) e dois deles ímpares.

Caso 1: $c+2$ é ímpar: Portanto, $c = 1$. Neste caso v_4 e v_5 são os vértices de grau ímpar. Os outros são os de grau par, donde $a = b = 0$. Mas então o grau de v_2 seria zero e o grafo desconexo.

Caso 2: $c+2$ é par: Portanto, $c = 0$. Neste caso v_4 e v_5 são vértices de grau par. Dos restantes, um tem que ser de grau par e dois de grau ímpar. Temos assim as seguintes três possibilidades:

$g(v_1) = a+2$	$g(v_2) = a+b$	$g(v_3) = b+2$	a	b
par	ímpar	ímpar	0	1
ímpar	par	ímpar	1	1
ímpar	ímpar	par	1	0

Soluções para $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$: $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ ou $(1, 0, 0)$

(b) Basta usarmos o facto de que o número de arestas é metade da soma dos graus de todos os vértices, ou seja,

$$(a+2+a+b+b+2+c+2+c+2)/2 = (2a+2b+2c+8)/2 = a+b+c+4.$$

Portanto, esse número é igual a:

(i) $2+2+2+4 = 10$.

(ii) $1+1+c+4 = 6+c$.

(iii) $1+4 = 5$ (primeira e terceira soluções) ou $2+4 = 6$ (na segunda solução).