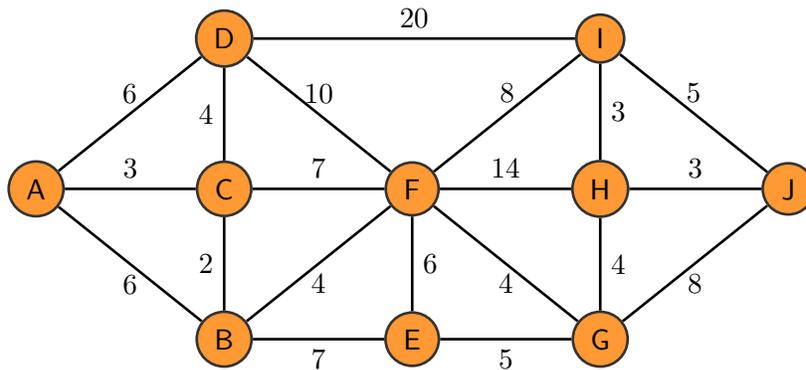


Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h00m

1. Considere o grafo  $G$  seguinte:



- (a) Usando o algoritmo de Dijkstra (explicitando os passos essenciais), determine o caminho mais curto do vértice A para os vértices I e J.
  - (b) Quando é que um grafo se diz uma árvore? Quantas arestas terá que apagar em  $G$  para ficar com uma árvore?
2. (a) Calcule  $\text{mdc}(23, 3)$ , usando o algoritmo de Euclides.
- (b) Quantas soluções da congruência  $3x \equiv_{23} 1$  existem no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$ ? Qual é a solução mais pequena?
- (c) Descodifique a mensagem “DMDCPQO”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (3p + 3) \pmod{23},$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros  $0, 1, 2, \dots, 22$  (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

3. Use o Princípio da Inclusão-Exclusão para calcular quantos inteiros entre 1 e 1000 não são divisíveis nem por 2 nem por 3.

4. Considere o seguinte plano de atribuição de números de telefone de uma determinada companhia telefônica internacional: cada número contém um código para o país (com 1, 2 ou 3 algarismos quaisquer), seguido de um número com 8 algarismos, da forma

$$N_1X_1X_2 - N_2X_3X_4 - X_5X_6.$$

- (a) Quantos números estão disponíveis por este sistema, se os  $N$ 's tiverem que ser um algarismo diferente de 0 e 1 e os  $X$ 's forem um algarismo qualquer?
- (b) Quantos números estão disponíveis por este sistema, se os  $N$ 's tiverem que ser um algarismo diferente de 0 e 1 e os  $X$ 's formarem uma permutação sem repetição dos algarismos entre 1 e 6 tal que  $X_i \neq i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )?
5. Suponha que uma bactéria necessita de duas horas para se desenvolver, após as quais produz dois descendentes e, posteriormente, mais dois descendentes no final de cada hora subsequente. Admitindo que todas as novas bactérias têm o mesmo comportamento, determine o número  $b_n$  de bactérias reproduzidas ao cabo de  $n$  horas, supondo que o processo se inicia com uma única bactéria acabada de nascer.
6. No sistema Braille, um símbolo (letra minúscula, sinal de pontuação, sufixo, etc.) é dado aumentando o tamanho de pelo menos um dos pontos na grelha de 6 pontos mostrada na figura (a) abaixo. Por exemplo, a figura (b) mostra a representação da letra "c" (os pontos nas posições 1 e 4 são aumentados). As figuras (c) e (d) mostram as representações das letras "m" e "t", respectivamente. O artigo definido "o" está representado na figura (e) enquanto o sufixo "tor" está em (f). Finalmente o sinal de ponto e vírgula é dado na figura (g) (os pontos nas posições 2 e 3 são maiores).

1 . . 4	• •	• •	. •	. •	. •	. .
2 . . 5	. .	. .	• •	• .	• .	• .
3 . . 6	. .	• .	• .	• •	. •	• .
(a)	(b) "c"	(c) "m"	(d) "t"	(e) "o"	(f) "tor"	(g) " ; "

- (a) Quantos símbolos diferentes poderemos representar no sistema Braille?
- (b) Quantos desses símbolos são representados por exactamente 3 pontos maiores?
- (c) Quantos símbolos têm um número par de pontos maiores?
-