Ano lectivo 2015/16 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 16/12/2015

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. (a) Iterando o algoritmo de Dijkstra obtemos:

Vértices	Etiquetas temporárias	Etiq. definitivas
A	0 (A)	0 (A)
B	~~6 (A-B)~~ 5 (A-C-B)	5 (A-C-B)
C	3 (A-C)	3 (A-C)
D	6 (A-D)	6 (A-D)
E	12 (A-C-B-E)	12 (A-C-B-E)
F	~~10 (A-C-F)~~ 9 (A-C-B-F)	9 (A-C-B-F)
G	13 (A-C-B-F-G)	13 (A-C-B-F-G)
H	~~23 (A-C-B-F-I-H)~~ 17 (A-C-B-F-G-H)	17 (A-C-B-F-G-H)
I	~~17 (A-D-I)~~ 17 (A-C-B-F-I)	$\boxed{\text{17 (A-C-B-F-I)}}$
J	~~21 (A-C-B-F-G-J)~~ 20 (A-C-B-F-G-H-J)	$\boxed{\text{20 (A-C-B-F-G-H-J)}}$

Assim, o caminho mais curto de A para I é o caminho A-C-B-F-I, de comprimento 17, enquanto o caminho mais curto de A para J é o caminho A-C-B-F-G-H-J de comprimento 20.

(b) Um grafo diz-se uma árvore se for conexo e não tiver ciclos.

Como o número de arestas numa árvore é necessariamente igual ao número de vértices menos um, e este grafo tem 10 vértices e 20 arestas, teremos que apagar 11 arestas para ficar com um grafo com 9 arestas.

2. (a) $23 = 3 \times 7 + 2$, $3 = 2 \times 1 + 1$ e $2 = 2 \times 1 + 0$, pelo que $\mathrm{mdc}(23, 3) = 1$, ou seja, os números são primos entre si.

(b) Da alínea anterior podemos concluir que

$$1 = 3 - 2 = 3 - (23 - 3 \times 7) = 8 \times 3 - 23.$$

Isto mostra que $x = 8$ é uma solução da congruência $3x \equiv_{23} 1$. Então

$$\{8 + 23k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

é o conjunto de todas as soluções, sendo 8 a positiva mais pequena. Além desta, há mais

$$\lfloor \frac{500-8}{23} \rfloor = 21$$

soluções no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 500\}$.

(c) Determinemos a função de desencriptação, que é a função inversa de f. Isto é, dado $f(p) = (3p + 3) \bmod 23$ determinemos o valor original p:

$$q = (3p + 3) \bmod 23 \Leftrightarrow q - 3 = 3p \bmod 23 \Leftrightarrow p = 8(q - 3) \bmod 23$$

pois pela alínea anterior 8 é o inverso de 3 em $\mathbb{Z}_{23}$.

Portanto, se $f(p) = q$, o valor original $p = f^{-1}(q)$ pode ser recuperado pela identidade

$$f^{-1}(q) = 8(q-3) \bmod 23.$$

Podemos agora calcular imediatamente a palavra original:

$f^{-1}(D) = f^{-1}(3) = 8(3-3) \bmod 23 = 0 = A$
$f^{-1}(M) = f^{-1}(11) = 8(11-3) \bmod 23 = 18 = T$
$f^{-1}(C) = f^{-1}(2) = 8(2-3) \bmod 23 = 15 = Q$
$f^{-1}(P) = f^{-1}(14) = 8(14-3) \bmod 23 = 19 = U$
$f^{-1}(Q) = f^{-1}(15) = 8(15-3) \bmod 23 = 4 = E$
$f^{-1}(O) = f^{-1}(13) = 8(13-3) \bmod 23 = 11 = M$

Resposta: ATAQUEM.

3. Consideremos o conjunto X dos 1000 inteiros entre 1 e 1000 e sejam A_2 o subconjunto de X dos números divisíveis por 2, e A_3 o subconjunto dos divisíveis por 3. O cardinal de A_2 é, evidentemente, igual a 500. Como

$$|A_3| = \lfloor \frac{1}{3}(1000) \rfloor = 333$$

e

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1}{6}(1000) \rfloor = 166$$

(são exactamente os múltiplos de 6), então

$$\begin{aligned} |(X \setminus A_2) \cap (X \setminus A_3)| &= |X \setminus (A_2 \cup A_3)| \\ &= |X| - |A_2 \cup A_3| \\ &= |X| - |A_2| - |A_3| + |A_2 \cap A_3| \\ &= 1000 - 500 - 333 + 166 = 333. \end{aligned}$$

4. (a) O código para o país é da forma $-$, $--$ ou $---$ (onde cada posição é preenchida por um dos 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$, sem qualquer restrição). Portanto existem $10+100+1000 = 1110$ códigos disponíveis. O resto do número é da forma $NXX - NXX - XX$ (onde os N's são algarismos diferente de 0 e de 1 e os X's são algarismos arbitrários). Contando estes números, usando o princípio da multiplicação, obtemos

$$8 \times 10 \times 10 \times 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8^2 \times 10^6.$$

Em conclusão, existem no total

$$1110 \times 8^2 \times 10^6 = 111 \times 64 \times 10^7 = 7104 \times 10^7$$

números disponíveis.

(b) Neste caso, a única alteração é nas possibilidades de escolha para a parte do número que envolve os X's. Esse número de possibilidades deixa de ser 10^6 e passa a ser o número de desencontros de comprimento 6, ou seja,

$$\begin{aligned} D_6 &= 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 - 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 - 6 + 1 = \\ &= 6 \times 5 \times (12 - 4 + 1) - 5 = 30 \times 9 - 5 = 265. \end{aligned}$$

Em conclusão, existem no total

$$1110 \times 8^2 \times 265 = 7104 \times 2650$$

números disponíveis.

5. Evidentemente $b_0 = b_1 = 1$ e $b_2 = 3$. Ao fim de n meses, o número b_n de bactérias existentes será igual ao número de bactérias existentes no final do mês anterior (ou seja, b_{n-1}) mais as que entretanto foram produzidas no decorrer desse mês (cujo número é igual ao dobro do número de bactérias em condições de se reproduzir nesse mês, ou seja, $2b_{n-2}$). Assim,

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}.$$

Trata-de de uma relação de recorrência de segunda ordem com equação característica

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Resolvendo-a obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -1.$$

Portanto, a solução geral da relação de recorrência é da forma $b_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Os valores de α e β podem ser facilmente calculados usando as condições iniciais:

$$\begin{cases} 1 = b_0 = \alpha + \beta \\ 1 = b_1 = 2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 2 = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Em conclusão,

$$b_n = \frac{2}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

6. (a) Cada símbolo pode ser visto como uma sequência de comprimento 6 de pontos pequenos e pontos grandes (por exemplo, a letra "c" corresponde à sequência $\bullet \cdot \cdot \bullet \cdot \cdot$). Há $\overline{P}(2,6) = 2^6 = 64$ sequências destas. No entanto, a sequência

$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$

da figura (a) não corresponde a nenhum símbolo, pelo que teremos que a descontar: existem no total 63 símbolos diferentes.

(b) Construir uma sequência dessas com 3 pontos grandes corresponde a escolher o subconjunto de 3 das 6 posições onde vamos colocar esses pontos (nas três posições restantes serão colocados pontos pequenos). Como existem $C(6,3) = 20$ subconjuntos desses, a resposta é 20.

(c) Com 0 pontos grandes não existe nenhum símbolo. Atendendo à alínea anterior, existem

$$C(6,2) + C(6,4) + C(6,6) = 15 + 15 + 1 = 31$$

símbolos com um número par de pontos grandes.