Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 1h **Teste 1A - Soluções** 21/10/2015

Nome completo:

Número de estudante:

Este teste tem 4 questões. Responda apenas ao que lhe é pedido nos lugares indicados para o efeito.
Nas questões 2 e 3, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma **resposta errada perderá metade dessa cotação** *(desde que a nota do teste permaneça não negativa).*

---

1. (a) Prove, usando equivalências básicas, que

$$q \to p \wedge r \equiv (q \to p) \wedge (q \to r).$$

$$\begin{aligned} q \to p \wedge r &\equiv \neg q \vee (p \wedge r) \\ &\equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \\ &\equiv (q \to p) \wedge (q \to r). \end{aligned}$$

(b) Considere o seguinte argumento:
"P canta só se Q não canta. É suficiente que Q cante para P e R também cantarem. Se R cantar então Q canta e P não canta."
Mostre que então $\boldsymbol{Q}$ **e** $\boldsymbol{R}$ **não cantam**.

Traduzindo o argumento em fórmulas da lógica proposicional:

$$\begin{array}{l} (1)\ P \to \neg Q \\ (2)\ Q \to P \wedge R \\ (3)\ \underline{R \to Q \wedge \neg P} \\ \quad\ \therefore\ \neg Q \wedge \neg R \end{array}$$

Teremos então que mostrar que a fórmula

$$(P \to \neg Q) \wedge (Q \to P \wedge R) \wedge (R \to Q \wedge \neg P) \to (\neg Q \wedge \neg R)$$

é uma tautologia.
Podemos fazer isso, por exemplo, com uma tabela de verdade ou, aproveitando a alínea anterior, com uma simples dedução:

Como
(1) $\equiv Q \to \neg P$
(2) $\equiv (Q \to P) \wedge (Q \to R)$
(3) $\equiv (\neg Q \vee P) \to \neg R$,
então (1) e (2) garantem $\neg Q$ (caso contrário, se Q fosse V, teríamos simultaneamente $\neg P$ e P). Por outro lado, $\neg Q$ em conjunto com (3) implica $\neg R$.

2. Indique se os seguintes argumentos estão correctos: (**S**: sim; **N**: não) **S** **N**

(a) *Se estiver a chover, então fico em casa. Não está a chover. Logo, não fico em casa.* [ ] [×]

[porque a dedução corresponde à implicação $(p \to q) \land \neg p \to \neg q$ que <u>não é</u> uma tautologia.]

(b) *Se o suspeito cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O suspeito estava nervoso quando interrogado. Logo, o suspeito cometeu o crime.* [ ] [×]

[porque a dedução corresponde à implicação $(p \to q) \land q \to p$ que <u>não é</u> uma tautologia.]

(c) *P é uma condição suficiente para Q. Verifica-se P ou a negação de R. Logo, se Q não for verdadeiro não se verifica R.* [×] [ ]

[porque a dedução corresponde à implicação $(P \to Q) \land (P \lor \neg R) \land \neg Q \to \neg R$ que <u>é</u> uma tautologia.]

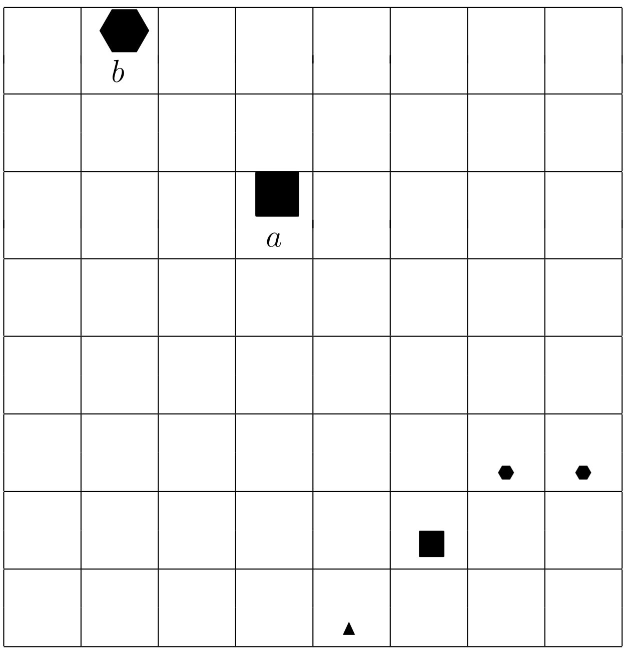
(d) *Este argumento é válido ou é inválido. Se este argumento é válido então posso demonstrá-lo. Se este argumento é inválido posso refutá-lo. Não posso demonstrar este argumento. Logo, posso refutá-lo.* [×] [ ]

[porque a dedução corresponde à implicação $(p \lor \neg p) \land (p \to q) \land (\neg p \to r) \land \neg q \to r$ que <u>é</u> uma tautologia.]

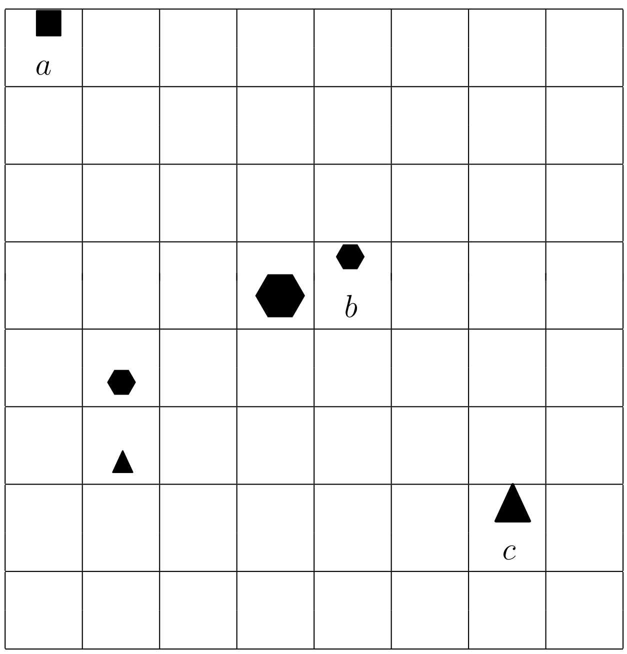
3. Avalie da verdade ou falsidade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo, preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	**Mundo A**	**Mundo B**
$Large(a) \leftrightarrow Large(b)$	V	V
$\forall x(Cube(x) \to x = a)$	F	V
$\neg\forall x((Dodec(x) \land Large(x)) \to BackOf(x, a))$	F	V
$\exists x \forall y(Dodec(x) \land Small(x) \land RightOf(x, y))$	F	F
$\exists x(Small(x) \land \forall y(y \neq x \to BackOf(y, x)))$	V	F

Mundo A



Mundo B



4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a proposição

$$\boldsymbol{P(n)}\text{: } 4^n - 1 \text{ é um múltiplo de 3.}$$

(a) Seja $k \in \mathbb{N}$. Mostre que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Pode concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$?

(a) Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é, $4^k - 1$ é um múltiplo de 3. Então, como

$$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 3 \times 4^k + 4^k - 1,$$

$P(k+1)$ também é V, uma vez que, pela hipótese de indução, $4^k - 1$ é um múltiplo de 3, e a outra metade, 3×4^k, é claramente também um múltiplo de 3.

(b) Sim, pois o passo inicial do método de indução também se verifica. De facto,

$P(1)$ é V: $4 - 1 = 3$ é múltiplo de 3.