Ano lectivo 2017/18 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática **PROVA A** 15/11/2017

Nas questões de escolha múltipla **1(a)** e **2(a)**, cada resposta certa terá a cotação máxima atribuída e cada resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. (a)

	Mundo A	Mundo B
1.	V	F
2.	V	F
3.	V	V

(b) Mundo A: Como b é um dodecaedro e não existem objectos à direita de c, o valor lógico da fórmula é $\neg(\mathsf{V} \leftrightarrow \mathsf{F}) = \neg\mathsf{F} = \mathsf{V}$.

Mundo B: Como nem b nem c são dodecaedros e existem objectos à direita de c, o valor lógico da fórmula é $\neg(\mathsf{F} \leftrightarrow \mathsf{V}) = \neg\mathsf{F} = \mathsf{V}$.

2. (a) (i) F (ii) V (iii) V

(b) (i) Em qualquer mundo onde a é, por exemplo, um cubo (ou um dodecaedro) médio (ou grande), as premissas são verdadeiras mas a conclusão é falsa.

3. (a) Seja $P(n)$ a identidade

$$\sum_{i=0}^{n}(1-8i) = 1 - 4n^2 - 3n.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer inteiro $n \geq 0$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) <u>$P(0)$ é V</u>:

É evidente, pois $\sum_{i=0}^{0}(1-8i) = 1$ e, por outro lado, $1 - 4n^2 - 3n = 1$ quando $n = 0$.

(2) <u>A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 0$</u>:

Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$\sum_{i=0}^{k}(1-8i) = 1 - 4k^2 - 3k.$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{k+1}(1-8i)=\sum_{i=0}^{k}(1-8i)+(1-8(k+1))=1-4k^2-3k+(1-8k-8)=-6-4k^2-11k$$

enquanto

$$1-4(k+1)^2-3(k+1)=1-4k^2-8k-4-3k-3=-6-4k^2-11k$$

o que mostra precisamente que $P(k+1)$ também é V.

(b)

$$\sum_{i=0}^{n}(1-8i)=\sum_{i=0}^{n}1-8\sum_{i=0}^{n}i=\sum_{i=0}^{n}1-8\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=(n+1)-8\frac{n(n+1)}{2}=n+1-4n^2-4n=1-4n^2-3n.$$

4. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{200}i(i+1)=\sum_{i=1}^{200}(i+i^2)=\sum_{i=1}^{200}i+\sum_{i=1}^{200}i^2=\frac{200\times 201}{2}+\frac{200\times 201\times 401}{6}=\frac{200\times 201\times(3+401)}{6}=$

$\displaystyle\frac{200\times 201\times 404}{6}=200\times 67\times 202.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{25}\left[(-1)^i\sum_{j=1}^{60}2j^3\right]=-\cancel{\sum_{j=1}^{60}2j^3}+\cancel{\sum_{j=1}^{60}2j^3}-\cancel{\sum_{j=1}^{60}2j^3}+\cancel{\sum_{j=1}^{60}2j^3}-\cdots+\cancel{\sum_{j=1}^{60}2j^3}-\sum_{j=1}^{60}2j^3=$

$\displaystyle-\sum_{j=1}^{60}2j^3=-2\sum_{j=1}^{60}j^3=-2\left(\frac{60\times 61}{2}\right)^2=-30\times 60\times 61^2.$

(c) Em qualquer grafo com 101 vértices, $\displaystyle\sum_{i=1}^{101}g(v_i)=2a$ (onde a denota o número total de arestas).

Em particular, no grafo K_{101}, como cada vértice tem grau 100, temos

$$\sum_{i=1}^{101}100=2a\Leftrightarrow 100\times 101=2a\Leftrightarrow a=50\times 101=5050.$$

(d) No grafo completo K_n todo o vértice tem grau $n-1$. Então, pelo Teorema de Euler, K_n é euleriano se e só se $n-1$ é par, isto é, se e só se n é ímpar.

Por outro lado, como todos os vértices têm o mesmo grau, nenhum K_n com $n>2$ pode ser semi-euleriano (mais geralmente, nenhum grafo regular com mais que 2 vértices pode ser semi-euleriano). Sobra o caso K_2, que é claramente semi-euleriano.

5. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{2i}x^{2i+1}.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\frac{i!}{x^i}.$

(c) $x+x^2+\left(x^2\right)^3+\left(\left(x^2\right)^3\right)^4+\cdots+\left(\ldots\left(\left(x^2\right)^3\right)^4\ldots\right)^n=x+x^2+x^{2\times 3}+x^{2\times 3\times 4}+\cdots+x^{2\times 3\times 4\cdots\times n}=$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x^{i!}.$