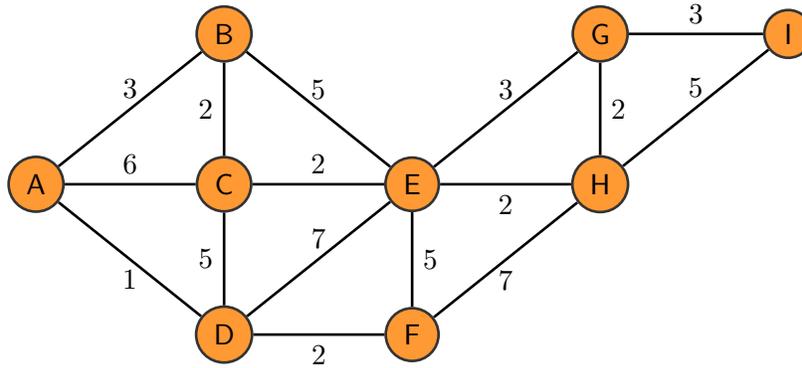


Duração: 1h30m

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Usando o algoritmo de Dijkstra, determine o trajecto mais curto de A para I no grafo



2. Decodifique a mensagem “HLBM ICFDBM”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (6p + 1) \pmod{23},$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros 0, 1, 2, ..., 22 (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

3. Seja $X = \{1, 2, 3, \dots, 60\}$.

- (a) Quantos elementos de X são divisíveis por 2?
- (b) Quantos elementos de X são divisíveis por 3?
- (c) Quantos elementos de X não são divisíveis por 2 nem por 3?

4. Determine:

- (a) Uma árvore com 9 vértices na qual o número de vértices de grau 4 é o maior possível.
- (b) O número de soluções da congruência $2x \equiv_7 5$ no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$.
- (c) O número de sequências binárias de comprimento 12 nas quais as duas últimas entradas são iguais a 0 e o número de zeros é igual ao número de uns.
- (d) O número de maneiras diferentes de distribuir 10 bolas iguais por 6 caixas numeradas de modo a que nenhuma caixa fique vazia.
- (e) Quantos divisores do número 2310 têm exactamente 3 factores na sua factorização em primos.