

Duração: 2h30m

Na questão 1 de escolha múltipla, cada resposta certa terá a cotação máxima atribuída e cada resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação.
 Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Indique o valor de verdade das seguintes cinco sentenças nos mundos A e B abaixo

(V: verdade, F: falso):

- (a) $\neg(\text{Tet}(b) \rightarrow \text{RightOf}(b, a))$.
- (b) $\exists x \text{LeftOf}(x, a) \wedge \exists y(\text{Dodec}(y) \wedge \text{Large}(y))$.
- (c) $\neg[\exists x \text{LeftOf}(c, x) \leftrightarrow (\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(c))]$.
- (d) $\forall x \forall y[(x \neq y \wedge \text{Dodec}(x) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \neg \text{SameSize}(x, y)]$.

Mundo A

	<i>d</i> ▲						
							<i>e</i> ▲
	<i>b</i> ▲						
							▲
						<i>f</i> ⬡	
	●						
	⬡						<i>a, c</i> ⬡

Mundo B

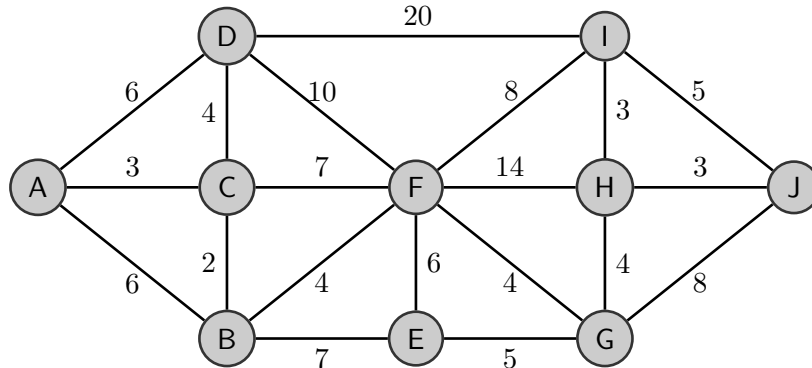
<i>d</i> ⬡							
			⬡			<i>e</i> ⬡	
		<i>a</i> ▲				▲	<i>c</i> ⬡
		■					■
			<i>b</i> ⬡			●	

- | | | |
|--|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▲ Tetraedro Pequeno ▲ Tetraedro Médio ▲ Tetraedro Grande | <ul style="list-style-type: none"> ■ Cubo Pequeno ■ Cubo Médio ■ Cubo Grande | <ul style="list-style-type: none"> ● Dodecaedro Pequeno ⬡ Dodecaedro Médio ⬡ Dodecaedro Grande |
|--|---|---|

2. Prove, usando o método de indução matemática, que a seguinte fórmula é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

3. Determine o trajecto mais curto de A para J no grafo



4. Descodifique a mensagem

PIBE ◊ D ◊ W@P

que foi encriptada utilizando o alfabeto da figura e a função $f(p) = (22p + 25) \bmod 29$

(Nota: o símbolo ◊ indica um espaço em branco).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z	W	*	@	◊
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

5. Determine:

(a) Uma fórmula que não contenha o operador \neg , que corresponda à negação da fórmula

$$\forall x \exists y (\text{Dodec}(x) \rightarrow \neg \text{SameSize}(x, y)).$$

(b) $\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} \right).$

(c) A solução da congruência $22x \equiv_{29} -1$ em \mathbb{Z}_{29} .

(d) Quantos números maiores que 500 se podem formar com 3 algarismos, nos quais o primeiro algarismo é diferente do último.

(e) O número de permutações $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ que pode formar com os números 1,2,3,4,5,6, com a propriedade $a_i \neq i$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (Justifique convenientemente a sua resposta, usando o princípio da inclusão-exclusão.)

6. Suponha que uma bactéria necessita de duas horas para se desenvolver, após as quais produz dois descendentes e, posteriormente, mais dois descendentes no final de cada hora subsequente. Admitindo que todos os descendentes têm o mesmo comportamento, determine:

(a) Uma relação de recorrência que descreva a sequência b_n ($n \geq 0$) de bactérias reproduzidas após n horas (suponha que o processo se inicia com uma única bactéria acabada de nascer, isto é, $b_0 = 1$).

(b) O valor de b_n , para qualquer $n \geq 0$.