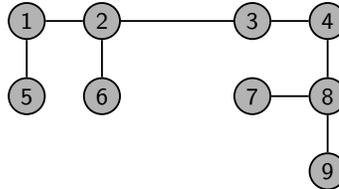


Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 1h30m

1. (a) O grafo abaixo é uma árvore?



(b) O grafo é bipartido? Caso seja, exiba uma bipartição.

(c) Pode haver uma árvore com 9 vértices sendo dois deles de grau 5?

2. Complete a seguinte expressão, preenchendo os espaços em branco, com os coeficientes respectivos:

$$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + \text{_____} x^5y^2 + \text{_____} x^4y^3 + \text{_____} x^3y^4 + \text{_____} x^2y^5 + \text{_____} xy^6 + y^7.$$

3. Descodifique a mensagem “LPX CGP”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (8p + 2) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros 0, 1, 2, ..., 22 (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

4. Determine:

(a) O número de arestas do grafo simples completo K_{47} .

(b) $\sum_{i=0}^{2019} \binom{2019}{i}$.

(c) O número de elementos do conjunto $\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 10^2, \text{mdc}(k, 30) = 1\}$.

(d) Quantos números com exactamente 3 factores primos distintos pode formar com os primos 2, 3, 5, 7 e 11? E se os 3 factores primos não forem necessariamente distintos?

(e) O número de maneiras distintas de distribuir 8 bolas iguais por 5 caixas numeradas $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ de modo a que nenhuma caixa fique vazia.
