Ano lectivo 2018/19 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática **PROVA A** 4/01/2019

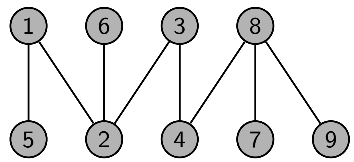
Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

---

1. (a) Sim, pois é conexo e não tem ciclos.

   (b) Sim, pois como provámos nas aulas, toda a árvore é um grafo bipartido. Neste caso, a árvore corresponde ao seguinte grafo bipartido:



   (c) Não. De facto, pela relação entre os graus dos vértices e o número a de arestas num grafo, e sabendo que, numa árvore, $a+1$ é igual ao número de vértices, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{9} g(v_i) = 2a = 2(9-1) = 16.$$

   Se dois desses graus forem iguais a 5, esta identidade é impossível:

$$16 = 10 + \sum_{i=1}^{7} g(v_i) \Leftrightarrow 6 = \sum_{i=1}^{7} g(v_i) \geq 7 \text{ !!!}$$

2. Pela fórmula do binómio de Newton,

$$(x+y)^7 = x^7 + 7\ x^6y + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}xy^6 + y^7.$$

   Basta calcular

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21 \quad \text{e} \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!\ 3!} = 35$$

   pois, por simetria, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$ e $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$. Assim,

$$(x+y)^7 = x^7 + 7\ x^6y + 21\ x^5y^2 + 35\ x^4y^3 + 35\ x^3y^4 + 21\ x^2y^5 + 7\ xy^6 + y^7.$$

3. Cálculo da função de desencriptação:

$$\begin{aligned} q = f(p) = (8p+2) \bmod 23 \quad &\Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 8p+2 \\ &\Leftrightarrow \quad q-2 \equiv_{23} 8p \\ &\Leftrightarrow \quad 3(q-2) \equiv_{23} p \end{aligned}$$

   pois 3 é o inverso de 8 em $\mathbb{Z}_{23}$: $3 \times_{23} 8 = 1$. Portanto, $f^{-1}(q) = 3(q-2) \bmod 23$.

Então, $f^{-1}(L) = f^{-1}(10) = 3 \times 8 \bmod 23$. Logo,

$$f^{-1}(L) = 1 = \mathbf{B}.$$

Quanto às outras letras:

$$f^{-1}(P) = f^{-1}(14) = (12 + 12 + 12) \bmod 23 = 13 = \mathbf{O}.$$

$$f^{-1}(X) = f^{-1}(21) = (19 + 19 + 19) \bmod 23 = 11 = \mathbf{M}.$$

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(2) = 3 \times 0 \bmod 23 = 0 = \mathbf{A}.$$

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(6) = 3 \times 4 \bmod 23 = 12 = \mathbf{N}.$$

Mensagem original: **BOM ANO**!

4. (a) Cada aresta é definida por um conjunto de dois vértices $\{v_i, v_j\}$ $(i, j \in \{1, 2, \dots, 47\},\ i \neq j)$. Assim, o número de arestas é igual ao número de subconjuntos de cardinal 2 do conjunto $\{1, 2, \dots, 47\}$, ou seja, o número de combinações sem repetição

$$C(47, 2) = \frac{47!}{45!\ 2!} = 47 \times 23 = 1081.$$

(b) Pela fórmula do binómio de Newton,

$$\sum_{i=0}^{2019} \binom{2019}{i} = (1+1)^{2019} = 2^{2019}.$$

(c) Uma vez que $30 = 2 \times 3 \times 5$, então $\mathrm{mdc}(k, 30) = 1$ se e só se k não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5. Assim

$$\{k \in \mathbb{N}\colon 1 \leq k \leq 10^2, \mathrm{mdc}(k, 30) = 1\} = \{1 \leq k \leq 100\colon 2 \nmid k, 3 \nmid k, 5 \nmid k\}.$$

Denotemos o conjunto dos primeiros 100 números naturais por [100]. Designando o conjunto $\{k \in [100] \mid k \text{ é divisível por } i\}$ por A_i, para $i = 2, 3, 5$, o número pedido dos inteiros positivos inferiores ou iguais a 100, não divisíveis por 2, 3 e 5, é o cardinal de

$$([100] \setminus A_2) \cap ([100] \setminus A_3) \cap ([100] \setminus A_5) = [100] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5).$$

Bastará então calcular $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$, o que pode ser feito pela fórmula do Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (|A_2| + |A_3| + |A_5|) - (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5|) + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|.$$

Claro que

$$|A_2| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50,\ |A_3| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33,\ |A_5| = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20.$$

Uma vez que, como 2, 3 e 5 são primos, são primos entre si dois a dois, o cálculo das parcelas restantes também é simples. Por exemplo,

$$A_2 \cap A_3 = \{k \in [100]\colon 2 \mid k, 3 \mid k\} = \{k \in [100]\colon \mathrm{mmc}(2,3) \mid k\} = \{k \in [100]\colon 6 \mid k\},$$

donde

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16.$$

Continuando:

$$|A_2 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10,\ |A_3 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6,\ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 3.$$

Em conclusão,

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (50 + 33 + 20) - (16 + 10 + 6) + 3 = 74$$

pelo que o resultado final será $100 - 74 = 26$.

(d) São os números do tipo

$$2 \times 3 \times 5,\ 2 \times 3 \times 7,\ 2 \times 3 \times 11, \ldots$$

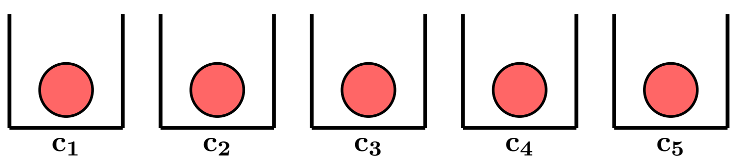
que se podem formar com todas as combinações sem repetição dos cinco primos 2, 3, 5, 7, 11, três a três. Portanto, o seu número é igual a

$$C(5, 3) = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10.$$

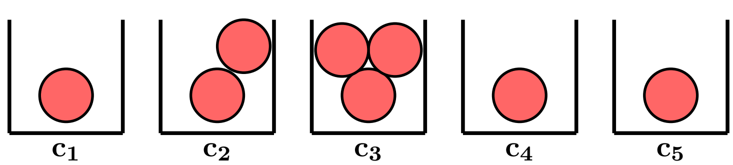
No caso em que os três factores não são necessariamente distintos é evidente que as possibilidades de configuração serão dadas pelas combinações com repetição:

$$\overline{C}(5, 3) = C(7, 3) = \frac{7!}{4!\ 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35.$$

(e) Teremos primeiro que colocar uma bola em cada caixa para nenhuma fique vazia. Como as bolas são todas iguais, só temos uma maneira de fazer isso:



Portanto, o problema equivale a distribuir as 3 bolas restantes pelas 5 caixas, com total liberdade. Cada uma dessas distribuições é uma combinação com repetição, de comprimento 3, formada pelas 5 etiquetas das caixas, pois colocar as 3 bolas corresponde a escolher o multiconjunto das etiquetas das 3 caixas onde são colocadas. Por exemplo, a distribuição



corresponde ao multiconjunto $\{c_2, c_3, c_3\}$. Portanto, o número total é igual a

$$\overline{C}(5, 3) = C(7, 3) = \frac{7!}{4!\ 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35.$$