Apontamentos
de
GEOMETRIA DIFERENCIAL

Jorge Picado

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

2003

Os apontamentos que se seguem contêm as notas das aulas da disciplina de Geometria Diferencial. Inclui-se ainda algum material extra, com o intuito de obviar o risco que se corre, num curso introdutório de Geometria Diferencial, dos resultados interessantes que se poderão colher não compensarem o trabalho dispendido com a introdução e formulação rigorosa dos conceitos. Este material poderá servir como referência para os estudantes mais curiosos que, porventura, queiram aprofundar certos temas.

Na sua elaboração baseámo-nos em [10], [5] e [8]. Nas demonstrações de muitos dos resultados fundamentais seguimos de perto as notas do Professor F. J. Craveiro de Carvalho:

- *Notas sobre Geometria Diferencial de curvas em* $\mathbb{R}^3$, Universidade de Coimbra, 1987;

- *Superfícies em* $\mathbb{R}^3$, Universidade de Coimbra, 1989.

Resumo

Em Geometria Diferencial estudam-se objectos de natureza geométrica – curvas e superfícies – usando as técnicas do cálculo diferencial e integral. A geometria diferencial clássica engloba o estudo das propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano. Tem as suas origens no século XIX, com os primórdios da Análise, e nela se estudam as propriedades locais, isto é, aquelas que dependem somente do comportamento da curva ou superfície na vizinhança de um ponto. Por isso é usual chamar-lhe *teoria local de curvas e superfícies*. A geometria diferencial moderna estuda a influência das propriedades locais no comportamento de toda a curva ou superfície (*teoria global de curvas e superfícies*) e estende o estudo aos espaços não euclidianos e variedades de qualquer dimensão, baseando-se ainda, no entanto, nos métodos do cálculo diferencial e integral.

Neste curso abordamos os temas clássicos da geometria diferencial: curvas e superfícies no plano e no espaço. Estudamos assim resultados obtidos na sua quase totalidade no século XIX. Curvas e superfícies são objectos que qualquer pessoa pode ver, e muitas das questões que podem ser levantadas sobre estes objectos são óbvias e naturais. A geometria diferencial preocupa-se com a formulação matemática de algumas dessas questões e em tentar encontrar respostas para elas, usando as técnicas do cálculo diferencial.

Num primeiro capítulo dedicamo-nos ao estudo das curvas. Num segundo (e último) capítulo estudamos a teoria local das superfícies, cuja génese se deve a Gauss com

o seu famoso trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Comm. Soc. Göttingen Bd 6, 1823-1827) [4].

Tentamos seguir sempre a abordagem mais directa e simples a cada resultado, mantendo sempre os pré-requisitos no mínimo possível. Esta parece-nos ser a abordagem certa para um primeiro estudo da geometria diferencial, motivando os conceitos e os problemas e fundamentando a intuição.

Pré-requisitos

Conhecimentos básicos de Análise e Álgebra Linear (incluindo matrizes e determinantes).
Capítulo I: O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (a estrutura de espaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, produto escalar, produto vectorial, produto misto, norma euclidiana); Funções vectoriais de variável real (limites, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade).
Capítulo II: O espaço métrico $\mathbb{R}^n$ (distância euclidiana, bolas abertas, abertos, conexos, subespaços métricos de $\mathbb{R}^n$); Funções vectoriais de variável vectorial (continuidade e diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$).

Material de estudo

Além destes apontamentos recomendamos:

- O. Neto, *Tópicos de Geometria*, Universidade Aberta, 1999. (51N/NET)[1]
- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2001. (53-01/PRE)
- M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976. (53C/CAR)
- A. Goetz, *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1968. (53-01/GOE)

O livro

- A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993. (53-01/GRA)

contém inúmeros exemplos, com ilustrações, de curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Podem ser encontradas mais informações sobre a disciplina (incluindo os sumários das aulas teóricas, algumas notas históricas, etc.) em

http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/

[1] Entre parênteses indica-se a cota do livro na Biblioteca do DMUC.

Índice

I

Curvas em $\mathbb{R}^3$

1. Preliminares

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

constituído por todas as sequências ordenadas de n números reais. Os seus elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são denominados *pontos* de $\mathbb{R}^n$ e os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizem-se *coordenadas* (ou *componentes*).

Este conjunto munido das operações (vectoriais) *adição*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{array}$$

e *multiplicação escalar*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\alpha, (x_1, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \end{array}$$

é um espaço vectorial (real) de dimensão n. Por isso os elementos de $\mathbb{R}^n$ dizem-se também *vectores* (usaremos a notação $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para denotá-los) e os números reais, *escalares*.

É ainda possível definir a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x \mid y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \end{array}$$

Esta aplicação chama-se *produto escalar*. Trata-se de um *produto interno* em $\mathbb{R}^n$, visto satisfazer os axiomas de definição de produto interno:

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x \mid x) > 0$;

(2) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad (x \mid y) = (y \mid x)$;

(3) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$.

Portanto, estando em $\mathbb{R}^n$ definido um produto interno, $\mathbb{R}^n$ é um *espaço euclidiano* (de dimensão n). Claro que se podem definir outros produtos internos em $\mathbb{R}^n$. Este que aqui definimos é normalmente designado por produto escalar ou *produto interno canónico*.

Observação: Embora estas noções abstractas de espaço vectorial e espaço euclidiano estejam aparentemente divorciadas da geometria, os vectores e as operações vectoriais (adição, multiplicação escalar, produto escalar) têm uma interpretação (representação) geométrica interessante em espaços de dimensão ≤ 3.

Estando em $\mathbb{R}^n$ definido um produto interno, é possível associar-lhe uma norma, dita *norma euclidiana*:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x \mid x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \end{array}$$

Assim sendo, diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um *espaço normado*. À imagem de um vector x por esta função chama-se *norma* de x e representa-se por $\|x\|$.

Esta aplicação assim definida satisfaz, de facto, os denominados axiomas de norma:

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \|x\| > 0$;

(2) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Note-se que em $\mathbb{R}^n$ se podem definir outras normas, isto é, outras aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo os axiomas (1), (2) e (3) de norma. Apenas trabalharemos, contudo, com a norma euclidiana $\|x\| = (x \mid x)^{\frac{1}{2}}$.

O produto escalar e a norma euclidiana satisfazem ainda as seguintes propriedades:

- $(x \mid y) = \|x\| \, \|y\| \cos \angle(x, y)$;
- $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Trabalharemos ainda com o produto vectorial

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & x \wedge y \end{array}$$

(cuja definição e propriedades básicas serão enumeradas nas aulas práticas) e com o produto misto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & [x, y, z] := (x \mid y \wedge z), \end{array}$$

que satisfaz as propriedades:

- $[x, y, z] = (x \wedge y \mid z)$;

- $[x,y,z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

- $[x,y,z] = 0$ se e só se x, y e z são linearmente dependentes.

Funções vectoriais de variável real

O conceito de função vectorial de variável real será fundamental no nosso estudo.

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$. Uma aplicação $f : I \to \mathbb{R}^n$ diz-se uma *função vectorial de variável real*. Nesta definição I poderá ser um qualquer dos intervalos $[a,b]$, $[a,b)$ (b podendo ser $+\infty$), $(a,b]$ (a podendo ser $-\infty$) ou (a,b) (a podendo ser $-\infty$ e b podendo ser $+\infty$).

Estas funções chamam-se funções vectoriais de variável real porque, de facto, associam a cada real $t \in I$ um vector $f(t)$ de $\mathbb{R}^n$.

Se considerarmos para $i = 1, 2, \ldots, n$ as projecções

$$\begin{array}{rccc} \Pi_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

e denotarmos por f_i a composição $\Pi_i \circ f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos escrever $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$. Isto significa que cada função vectorial de variável real f origina n funções reais de variável real $f_1, f_2, \ldots, f_n$, cujos valores em t são as componentes de $f(t)$. Indicaremos este facto utilizando a notação

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

e chamaremos a f_i a i-ésima *componente* de f.

Os conceitos de limite, derivada, integral e continuidade de funções reais de variável real podem ser estendidos às funções vectoriais de variável real:

LIMITES

Definição 1.1. Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real e t_0 um ponto aderente de I. Diz-se que $\lim_{t \to t_0} f(t) = u$ se, para todo $\epsilon > 0$, for possível determinar $\delta > 0$ tal que

$$(t \in I \text{ e } 0 < |t - t_0| < \delta) \Rightarrow \|f(t) - u\| < \epsilon.$$

Se tivermos presente a noção de limite de uma função real de variável real a seguinte proposição tem demonstração imediata:

Proposição 1.2. *Sejam $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, t_0 um ponto aderente de I e $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Então $\lim_{t \to t_0} f(t) = u$ se e só se $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = u_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.* ∎

CONTINUIDADE

Definição 1.3. Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$. Diz-se que f é *contínua* em t_0 se $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$.

A função diz-se *contínua no intervalo* $J \subseteq I$ se for contínua em todos os pontos de J.

Atendendo à Proposição 1.2 é óbvio que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ é contínua em t_0 se e só se, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f_i é contínua em t_0.

São igualmente válidos, como no caso das funções reais de variável real, os teoremas relativos à continuidade da soma de funções vectoriais contínuas, do produto de uma função escalar contínua por uma função vectorial contínua e dos produtos escalar e vectorial de funções contínuas.

DIFERENCIABILIDADE

Definição 1.4. Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$. A função f diz-se *diferenciável em* t_0 se existir o limite

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

A este limite chama-se *derivada de* f *em* t_0 e representa-se por $f'(t_0)$.

Note-se que a razão incremental $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ é o produto do vector $f(t) - f(t_0)$ pelo escalar $\frac{1}{t-t_0}$.

Se $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, como

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \Big(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}\Big),$$

então, atendendo à Proposição 1.2, f é diferenciável em t_0 e $f'(t_0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se e só se, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f_i é diferenciável em t_0 e $f_i'(t_0) = u_i$.

Se f é diferenciável em todos os pontos de um intervalo $I_1 \subseteq I$ diz-se que é *diferenciável no intervalo* I_1 e a derivada f' é uma função vectorial definida neste intervalo e poderemos escrever

$$\begin{array}{cccc} f': & I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & f'(t). \end{array}$$

Admitamos que a função f' assim definida é diferenciável num intervalo $I_2 \subseteq I_1$. A derivada de f' em cada ponto t_0 de I_2 será, por definição, o limite

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0}.$$

e designa-se por *segunda derivada* da função vectorial f, ou *derivada de segunda ordem*, e representa-se por $f''(t)$ ou $f^{(2)}(t)$. Portanto $f^{(2)} : t \mapsto f^{(2)}(t)$ é uma função vectorial definida em I_2.

Se as sucessivas condições de diferenciabilidade forem satisfeitas poderemos definir a terceira derivada, a quarta derivada, etc. A *derivada de ordem* n de f, que denotaremos por $f^{(n)}$, é definida por $f^{(n-1)'}$, sendo ela própria uma função vectorial:

$$\begin{array}{rccc} f^{(n)}: & I_n \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & f^{(n)}(t). \end{array}$$

Definição 1.5. Uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diz-se *suave* se é infinitamente diferenciável, ou seja, se todas as derivadas $f', f'', f''', \cdots$ existem (em particular, são contínuas).

Proposição 1.6. *Sejam $f : I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que $f(I_1) \subseteq I_2$, f é diferenciável em t_0 e g é diferenciável em $f(t_0)$. Então $g \circ f$ é diferenciável em t_0 e*

$$(g \circ f)'(t_0) = f'(t_0)g'(f(t_0)).$$

Demonstração: Como $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é diferenciável em $f(t_0)$, cada g_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) é diferenciável em $f(t_0)$. Recordando o resultado da derivada da função composta para funções reais de variável real podemos concluir que cada $g_i \circ f$ é diferenciável em t_0 e que $(g_i \circ f)'(t_0) = f'(t_0)g_i'(f(t_0))$. Consequentemente, como $g \circ f = (g_1 \circ f, \ldots, g_n \circ f)$, $g \circ f$ é diferenciável em t_0 e

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(t_0) &= ((g_1 \circ f)'(t_0), \ldots, (g_n \circ f)'(t_0)) \\ &= (f'(t_0)g_1'(f(t_0)), \ldots, f'(t_0)g_n'(f(t_0))) \\ &= f'(t_0)(g_1'(f(t_0)), \ldots, g_n'(f(t_0))) \\ &= f'(t_0)g'(f(t_0)). \end{aligned}$$

■

INTEGRABILIDADE

Definição 1.7. Uma função $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se *integrável em* $[a, b]$ se cada f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) for integrável em $[a, b]$ e define-se $\int_a^b f(t)dt$ como sendo o vector $\left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right)$.

Para terminar listemos as propriedades do integral que utilizaremos ao longo do curso:

(1) $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;
$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt$.

(2) Para cada $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

(3) Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, $\int_a^b \|v\|dt = \|\int_a^b vdt\|$.

(4) Se f é integrável em $[a, b]$ então

$$\begin{array}{rccc} \|f\|: & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \|f(t)\| \end{array}$$

é integrável em $[a,b]$ e
$$\| \int_a^b f(t)dt \| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

(5) Se f é contínua em $[a,b]$ então é integrável em $[a,b]$ (porque nesse caso cada componente de f é contínua em $[a,b]$ logo é integrável em $[a,b]$).

(6) **[Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo]** Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ contínua em $[a,b] \subseteq I$. Para $c \in [a,b]$ defina-se $A : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ por $A(x) = \int_c^x f(t)dt$. Então, para cada $x \in (a,b)$, $A'(x)$ existe e é igual a $f(x)$.

(7) **[Segundo Teorema Fundamental do Cálculo]** Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ contínua no intervalo aberto I e seja F uma primitiva de f em I. Então, para quaisquer $c, d \in I$, $\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$.

Exercícios

1.1 Mostre que o produto escalar e a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ satisfazem as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(a) $(x \mid x) > 0$ se $x \neq 0$.

(b) $(x \mid y) = (y \mid x)$.

(c) $(\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$.

(d) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$.

(e) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(f) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(g) $(x \mid y) = \|x\| \, \|y\| \cos \angle(x, y)$.

(h) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

1.2 Em $\mathbb{R}^3$ considere uma base ortonormada (f_1, f_2, f_3) que determine a mesma orientação que a base canónica. Dados dois vectores x e y defina $x \wedge y$ usando o determinante simbólico cuja primeira linha é $f_1 \; f_2 \; f_3$ sendo a segunda e terceira formadas, respectivamente, pelas coordenadas de x e y. O objectivo das alíneas seguintes é mostrar que o produto vectorial $x \wedge y$ não depende da base, nas condições anteriores, que se fixa.

(a) Prove que $\| x \wedge y \|^2 = \| x \|^2 \| y \|^2 - (x \mid y)^2$.

(b) Prove que se x e y são não nulos então $\| x \wedge y \| = \| x \| \| y \| \sin \theta$, sendo θ o ângulo formado por x e y.

(c) Prove que $(x \wedge y \mid x) = (x \wedge y \mid y) = 0$.

(d) Mostre que sendo $x \wedge y \neq 0$ então $(x, y, x \wedge y)$ é uma base ordenada que determina a mesma orientação que (f_1, f_2, f_3).

(e) Mostre que $x \wedge y = 0$ se e só se x e y são linearmente dependentes.

(f) Considerando (e_1, e_2, e_3) outra base ortonormada com a orientação usual de $\mathbb{R}^3$, defina $x \mathbin{\overline{\wedge}} y$ de forma análoga a $x \wedge y$. Mostre que $x \wedge y = x \mathbin{\overline{\wedge}} y$.

1.3 Prove que o produto misto

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & [x, y, z] := (x \mid y \wedge z), \end{array}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $[x, y, z] = (x \wedge y \mid z)$;

(b) $[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

(c) $[x, y, z] = 0$ se e só se x, y e z são linearmente dependentes.