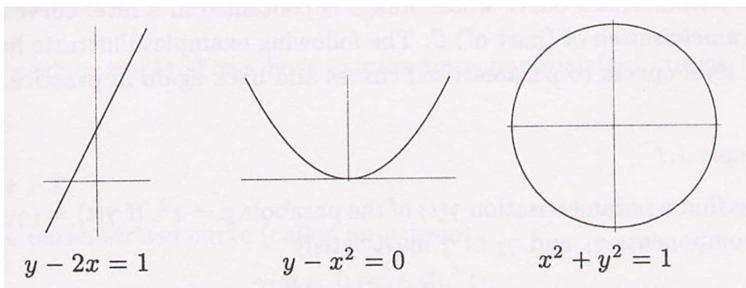
2. O que é uma curva?

Vamos começar por discutir duas formulações matemáticas da noção intuitiva de curva. Daremos alguns exemplos de curvas de cada tipo e modos práticos de passar de um tipo para o outro.

Já todos temos uma ideia, pelo menos intuitiva, de curva. Quando questionado para dar um exemplo de uma curva, o leitor pode dar uma linha recta, por exemplo $y - 2x = 1$, ou uma circunferência, por exemplo $x^2 + y^2 = 1$, ou talvez uma parábola, por exemplo $y - x^2 = 0$.



Todas estas curvas são descritas por meio da sua equação cartesiana $f(x, y) = c$, onde f é uma função de x e y e c é uma constante. Deste ponto de vista, uma curva é um conjunto de pontos

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}. \qquad (*)$$

Estes exemplos são todos de curvas no plano $\mathbb{R}^2$, mas podemos também considerar curvas em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, o eixo OX em $\mathbb{R}^3$ é a recta dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\},$$

e, mais geralmente, uma curva em $\mathbb{R}^3$ pode ser definida por um par de equações

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2.$$

Curvas deste tipo são chamadas *curvas de nível* (pois, por exemplo, a curva em $(*)$ é o conjunto de pontos (x, y) do plano nos quais a quantidade $f(x, y)$ atinge o "nível" c).

Existe um outro modo de pensar numa curva, mais útil em muitas situações. Consiste em olhar uma curva como o caminho traçado por um ponto a mover-se no espaço $\mathbb{R}^3$. Portanto, se $\gamma(t)$ é o vector de posição do ponto no instante t, a curva é descrita por uma função γ de um parâmetro escalar t com valores no espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ (caso a curva seja plana) ou em $\mathbb{R}^3$. Usamos esta ideia para dar a primeira definição formal de curva em $\mathbb{R}^n$ (só nos interessa os casos $n = 2$ e $n = 3$, mas é conveniente tratar ambos os casos simultaneamente):

Definição. Uma *curva parametrizada* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definida num intervalo I de $\mathbb{R}$. À imagem $\gamma(I)$ de uma curva parametrizada γ chamamos *traço* (por vezes também apelidada de *rasto* ou *caminho* da curva).

Em geral, o domínio I da curva pode ser um intervalo de qualquer tipo.

Uma curva parametrizada cujo traço esteja contido numa curva de nível C diz-se uma *parametrização* de (parte de) C. Os exemplos seguintes ilustram como passar de curvas de nível para curvas parametrizadas.

Exemplos 2.1. (a) Determinemos uma parametrização $\gamma(t)$ da parábola $y = x^2$. Se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, as componentes γ_1 e γ_2 de γ devem satisfazer

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{2.1.1}$$

para todos os valores t do intervalo I onde γ está definida (ainda por decidir), e de tal modo que todo o ponto na parábola é igual a $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ para algum $t \in I$. É claro que existe uma solução óbvia para a equação (2.1.1): considere $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = t^2$. Para obtermos todos os pontos da parábola devemos permitir que t possa tomar qualquer valor real (pois a primeira coordenada de $\gamma(t)$ é justamente t e a coordenada no eixo OX de um ponto da parábola pode ser qualquer número real), pelo que temos de tomar $I = (-\infty, \infty)$. Portanto, a parametrização procurada é

$$\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Mas esta não é a única parametrização da parábola. Outra escolha possível é $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ com $I = (-\infty, \infty)$. Portanto, a parametrização de uma dada curva de nível não é necessariamente única.

(b) Tentemos agora a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. É tentador considerar $x = t$ como no exemplo anterior e, consequentemente, $y = \sqrt{1-t^2}$ (também podíamos considerar $y = -\sqrt{1-t^2}$). Mas isto define só uma parametrização da metade superior da circunferência, uma vez que $\sqrt{1-t^2}$ é sempre ≥ 0. Analogamente, se tivessemos considerado $y = -\sqrt{1-t^2}$, obteríamos somente uma parametrização da metade inferior da circunferência.

Se queremos uma parametrização de toda a circunferência, teremos que pensar um pouco mais. Precisamos de funções γ_1 e γ_2 tais que

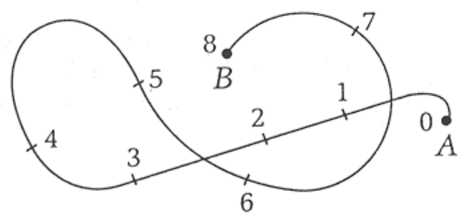
$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{2.1.2}$$

para qualquer $t \in I$, e de tal modo que *todo* o ponto na circunferência é igual a $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ para algum $t \in I$. Existe uma solução óbvia para a equação (2.1.2): $\gamma_1(t) = \cos t$ e $\gamma_2(t) = \sin t$ (pois $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para qualquer t). Podemos tomar $I = (-\infty, \infty)$, embora tal seja desnecessário; bastará um intervalo aberto de comprimento maior (ou igual, caso o intervalo seja semi-aberto) que 2π.

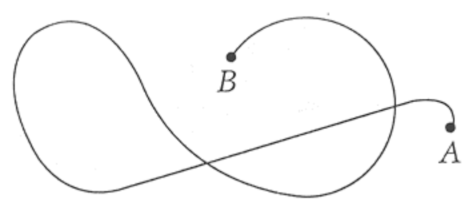
O exemplo seguinte mostra como passar de curvas parametrizadas para curvas de nível.

Exemplo 2.2. Consideremos a curva parametrizada (chamada *astróide*) definida por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e $I = \mathbb{R}$. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para qualquer t, as coordenadas $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ do ponto $\gamma(t)$ satisfazem $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. A curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$ coincide com o traço de γ.

É importante compreender a importância da definição de curva como uma função de um parâmetro t e perceber a distinção entre curva (parametrizada) e traço da curva. Por exemplo, suponhamos que uma formiga caminha de um ponto A até um ponto B e que, num mero exercício académico, vamos marcando em cada instante t, com o número t, a sua posição (começando com $t = 0$ em A):



Quando a formiga chegar a B teremos traçado o caminho por ela percorrido. O mesmo efeito pode ser conseguido se seguirmos o rasto de uma lesma:



Existe no entanto uma diferença significativa. Olhando para o rasto da lesma não poderemos dizer se ela esteve parada durante algum tempo nalgum ponto; tão pouco poderemos dizer alguma coisa sobre se, nalgum troço do caminho, o percorreu várias vezes (para trás e para a frente).

É por estas razões que em Geometria Diferencial se está mais interessado na função

$$t \longmapsto \text{ posição da formiga no instante } t \tag{2.2.1}$$

do que no caminho sem a sua evolução ao longo do tempo, isto é, na imagem da função (2.2.1). Para dar um exemplo explícito, suponhamos que a viagem da lesma era descrita pela correspondência

$$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \qquad (t \in [0,1]).$$

O rasto que ela marcaria seria o da circunferência de raio 1

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

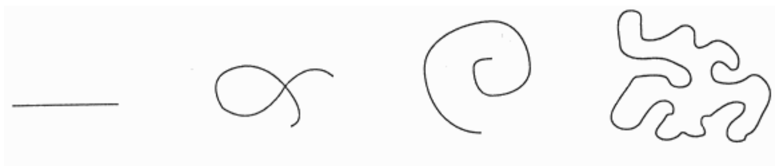
que é indistinguível do rasto que deixaria se o caminho percorrido fosse descrito pela correspondência

$$t \longmapsto (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t) \qquad (t \in [0,1])$$

ou

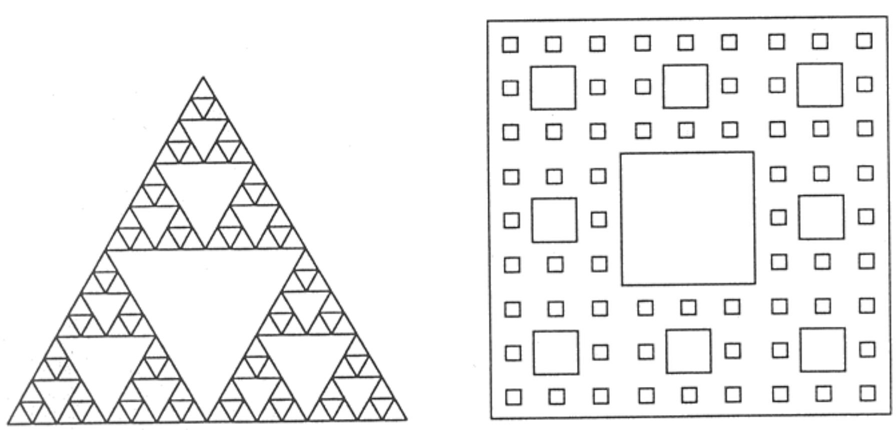
$$t \longmapsto (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \qquad (t \in [0,1]).$$

É por isso que em Geometria Diferencial adoptamos para definição de curva o conceito de curva parametrizada, ou seja uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$. Assumimos, além disso, por razões óbvias, que a função γ é contínua. Mas isso não chega. Com efeito, não será surpresa para ninguém que as seguintes figuras sejam exemplos de imagens de funções contínuas $I \to \mathbb{R}^3$:



Existe contudo um facto desconcertante sobre estas funções que estraga muita da nossa intuição: a figura seguinte também é um exemplo de imagem de uma destas funções.

Com efeito, em 1890 Peano apresentou um exemplo de uma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}^2$ (a que hoje se chama *curva de Peano*) cuja imagem preenche todo o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$, o que sai evidentemente fora do âmbito do nosso conceito intuitivo. Em 1915, Sierpiński construiu outros dois exemplos famosos de imagens contínuas planas do intervalo $[0,1]$. Na figura seguinte podem ver-se os gráficos destas duas curvas, ou melhor, de aproximações destas duas curvas:



Estes exemplos mostram que teremos que impôr às curvas condições adicionais, além da continuidade, de modo a excluirmos as curvas de Peano e a nos mantermos perto da intuição inicial. Dizemos que uma curva parametrizada γ é *suave* se γ é uma função suave, ou seja, se todas as derivadas $\gamma', \gamma'', \gamma''', \cdots$ existem.

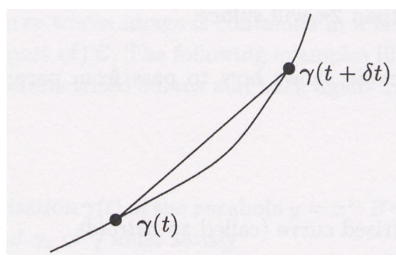
A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra "curva" estaremos a referir-nos a curvas parametrizadas suaves.

Definição. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva e $t \in I$. A $\gamma'(t)$ chamaremos *vector tangente* de γ no ponto $\gamma(t)$.

Para compreendermos a razão desta terminologia, notemos que o vector

$$\frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

é paralelo à corda ligando os pontos $\gamma(t)$ e $\gamma(t+\delta t)$ do traço C de γ:



É claro que, à medida que δt tende para zero, a corda se torna paralela à tangente a C em $\gamma(t)$. Portanto, a tangente deverá ser paralela a

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \gamma'(t).$$

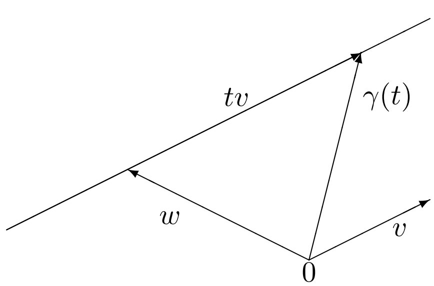
O seguinte resultado é intuitivamente claro:

Proposição 2.3. *Se o vector tangente a uma curva γ é constante, o traço de γ é (parte de) uma recta.*

Demonstração: Suponhamos que $\gamma'(t) = v$ para qualquer t, sendo v um vector constante. Então, integrando componente a componente, obtemos

$$\gamma(t) = \int \gamma'(t)dt = \int v dt = tv + w,$$

onde w é outro vector constante. Se $v \neq 0$, isto é a equação paramétrica da linha recta paralela a v e passando pelo ponto cujo vector de posição é w:



Se $v = 0$, o traço de γ é um único ponto (nomeadamente, o ponto cujo vector de posição é w). ∎

Definição. Chama-se *recta tangente* à curva γ no ponto $\gamma(t)$ à recta determinada pelo ponto $\gamma(t)$ e pelo vector tangente $\gamma'(t)$.

Portanto, a equação cartesiana da recta tangente é

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : P = \gamma(t) + \lambda\gamma'(t)\}.$$

Um dos primeiros problemas que se colocam no estudo de uma curva é como definir o seu comprimento. Para encontrar tal fórmula, notemos que se δt é muito pequeno, a parte do traço de γ entre $\gamma(t)$ e $\gamma(t+\delta t)$ é praticamente uma linha recta, pelo que o seu comprimento é aproximadamente

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\|.$$

Novamente porque δt é pequeno, $(\gamma(t + \delta t) - \gamma(t))/\delta t$ é aproximadamente igual a $\gamma'(t)$, pelo que o comprimento é aproximadamente

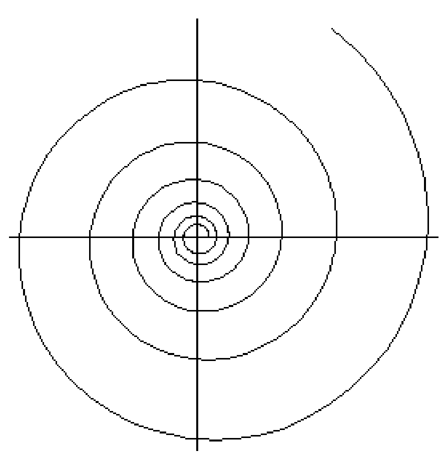
$$\|\gamma'(t)\|\delta t. \tag{2.3.1}$$

Se queremos calcular o comprimento de uma parte do traço de γ (não necessariamente pequena), podemos dividi-la em segmentos, cada um dos quais correspondendo a um pequeno incremento δt em t, calcular o comprimento de cada segmento usando (2.3.1), e adicionar tudo. Considerando δt a tender para zero, deveremos então obter o valor exacto do comprimento. Isto motiva a seguinte definição:

Definição. Dizemos que o *comprimento de arco* de uma curva γ a partir do ponto $\gamma(t_0)$ é a função s definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du.$$

Exemplo 2.4. Para a *espiral logarítmica*



definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ $(t \in [0, +\infty))$, temos

$$\gamma'(t) = \Big(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)\Big)$$

e

$$\|\gamma'(t)\|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}.$$

Logo, o comprimento de arco de γ a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$, por exemplo, é dado por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}}du = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Como

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\|du = \|\gamma'(t)\|,$$

se pensarmos em $\gamma(t)$ como sendo a posição de um ponto móvel no instante t, ds/dt é a velocidade do ponto. Isto motiva a seguinte definição:

Definição. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva. A *velocidade* de γ no ponto $\gamma(t)$ é o número real $v(t) = \|\gamma'(t)\|$. A curva γ diz-se *parametrizada por comprimento de arco* se $v(t) = 1$ para qualquer $t \in I$.

Veremos ao longo deste capítulo muitas fórmulas e resultados sobre curvas que tomam uma forma mais simples quando a curva está parametrizada por comprimento de arco. A razão para esta simplificação deve-se à seguinte proposição, que será muito útil na secção seguinte, onde estabelecemos toda a teoria de Frenet-Serret.

Proposição 2.5. *Em qualquer curva γ parametrizada por comprimento de arco, $(\gamma''(t)|\gamma'(t)) = 0$ para qualquer t, isto é, ou $\gamma''(t) = 0$ ou $\gamma''(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$, para qualquer t.*

Demonstração: Como a curva está parametrizada por comprimento de arco, temos $1 = \|\gamma'(t)\|^2 = (\gamma'(t)|\gamma'(t))$ para qualquer t. Por derivação relativamente a t obtemos $(\gamma''(t)|\gamma'(t)) + (\gamma'(t)|\gamma''(t)) = 0$, ou seja, $2(\gamma''(t)|\gamma'(t)) = 0$. ■

Observámos nos Exemplos 2.1 que uma dada curva de nível pode ter diversas parametrizações. Será importante compreendermos a relação entre elas.

Definição. Chama-se *mudança de parâmetro* a uma bijecção $\lambda : J \to I$ entre intervalos de $\mathbb{R}$, que é suave bem como a sua inversa λ^{-1}.

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva. À composição $\gamma \circ \lambda$ de γ com uma mudança de parâmetro chama-se *reparametrização* de γ.

Exemplo 2.6. No Exemplo 2.1(b) obtivemos a parametrização $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ para a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Outra parametrização é $\tilde{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$. Para vermos que $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização de γ, temos que encontrar uma mudança de parâmetro λ tal que $(\cos \lambda(t), \sin \lambda(t)) = (\sin t, \cos t)$. Uma solução possível é $\lambda(t) = \pi/2 - t$.

Observações 2.7. (a) Como a inversa de qualquer mudança de parâmetro ainda é uma mudança de parâmetro, se $\alpha = \gamma \circ \lambda$ é uma reparametrização da curva γ, também γ é uma reparametrização de α.
(b) É evidente que duas curvas que são reparametrizações uma da outra têm o mesmo traço, pelo que terão as mesmas propriedades geométricas.
(c) Em qualquer mudança de parâmetro $\lambda : J \to I$, os intervalos I e J são do mesmo tipo (isto é, são simultaneamente abertos, fechados ou semi-abertos). A justificação desta afirmação reside no seguinte facto:

> *Se $\lambda : I \to \mathbb{R}$ é contínua e injectiva então é estritamente decrescente ou estritamente decrescente.*

(d) Uma bijecção suave $\lambda : J \to I$ é uma mudança de parâmetro se e só se λ' nunca se anula. Com efeito, se λ é uma mudança de parâmetro, como $\lambda^{-1} \circ \lambda = \mathrm{id}$, temos $(\lambda^{-1} \circ \lambda)' = 1 \Leftrightarrow (\lambda^{-1})'(\lambda(t))\lambda'(t) = 1$ para qualquer $t \in J$, o que implica $\lambda'(t) \neq 0$ para qualquer $t \in J$. O recíproco será provado nas aulas práticas (Exercício 2.16).

O facto de λ' nunca se anular implica que $\lambda'(t) > 0$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda'(t) < 0$ para qualquer $t \in J$. No primeiro caso diz-se que λ *preserva a orientação*, e no segundo caso que *inverte a orientação*.

É claro que esperamos que o comprimento de arco seja uma propriedade geométrica e, portanto, que não dependa da parametrização. A seguinte proposição confirma-nos isso mesmo:

Proposição 2.8. *Seja $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização da curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Então os comprimentos de α e β coincidem.*

Demonstração: Seja λ a mudança de parâmetro tal que $\beta = \alpha \circ \lambda$. O comprimento de arco, $c(\beta)$, de β em $[c, d]$ é igual a

$$c(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\lambda'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \, |\lambda'(t)| dt.$$

Se $\lambda'(t) > 0$ para qualquer t, temos

$$c(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \lambda'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha),$$

fazendo a mudança de variável $u = \lambda(t)$. Caso contrário, se $\lambda'(t) < 0$ para qualquer t, temos

$$c(\beta) = -\int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| \lambda'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha).$$

■

Como já observámos, o estudo de uma curva simplifica-se quando ela é parametrizada por comprimento de arco. Será portanto importante conhecer que curvas admitem reparametrizações por comprimento de arco.

Definição. Um ponto $\gamma(t)$ de uma curva γ é um *ponto regular* se $\gamma'(t) \neq 0$; senão diz-se ponto singular de γ. Uma curva é *regular* se todos os seus pontos são regulares.

Antes de mostrarmos a relação entre regularidade de uma curva e existência de reparametrizações por comprimento de arco dessa curva, notemos uma propriedade simples das curvas regulares.

Proposição 2.9. *Qualquer reparametrização de uma curva regular é regular.*

Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \lambda$ uma reparametrização de uma curva regular γ. Derivando ambos os membros daquela igualdade obtemos $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Como λ' nunca se anula, está provado. ■

Teorema 2.10. *Uma curva possui uma reparametrização por comprimento de arco se e só se é regular.*

Demonstração: Em primeiro lugar, suponhamos que uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ possui uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$. Então $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ para alguma mudança de parâmetro $\lambda : I \to J$. Daqui segue que, para qualquer $t \in I$, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Logo $\gamma'(t)$ nunca se anula (pois $\tilde{\gamma}$, estando parametrizada por comprimento de arco, satisfaz $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ para qualquer $t \in J$, e λ é uma mudança de parâmetro).

Reciprocamente, seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular e seja $t_0 \in I$. Definamos $s : I \to \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Trata-se de uma função diferenciável:

$$\begin{aligned} s' : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|\gamma'(t)\|. \end{aligned}$$

Como γ é suave, é evidente que s' é suave. Portanto s é suave. A regularidade de γ implica $s' > 0$. Logo s é crescente e, portanto, é injectiva. Designemos por J a sua imagem $s(I)$. Obtemos deste modo uma bijecção $s : I \to J$ que é uma função suave. Uma vez que s' nunca se anula, podemos concluir pela Observação 2.7(d), que $s^{-1} : J \to I$ é uma mudança de parâmetro. Finalmente a composição $\gamma \circ s^{-1}$ é uma reparametrização de γ por comprimento de arco. De facto:

$$\begin{aligned} \|(\gamma \circ s^{-1})'(t)\| &= \|(s^{-1})'(t)\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= |(s^{-1})'(t)| \, \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \left|\frac{1}{s'(s^{-1}(t))}\right| \, \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \, \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.11. Para a espiral logarítmica $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, vimos no Exemplo 2.4 que $\|\gamma'(t)\|^2 = 2e^{2t}$. Este número nunca é zero, pelo que γ é regular. Vimos também que o comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (1,0)$ é dado por $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$. Então $t = \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$ e

$$\tilde{\gamma}(s) = \Big((\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)), (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)) \Big)$$

dá-nos uma reparametrização por comprimento de arco de γ.

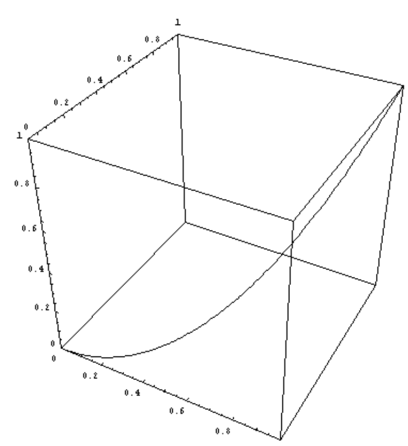
Embora qualquer curva regular, como acabámos de ver, possua uma reparametrização por comprimento de arco, pode ser muito complicado, ou mesmo impossível, determinar explicitamente essa reparametrização. Com efeito, dois tipos de obstáculos se nos poderão deparar:

(1) Em primeiro lugar, pode não ser possível exprimir o integral

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du$$

em termos de funções familiares como logaritmos e exponenciais, funções trigonométricas, etc. Por exemplo, se γ é a elipse dada por $\gamma(t) = (2 \sin t, \cos t)$ então $\|\gamma'(u)\| = \sqrt{4\cos^2 u + \sin^2 u} = 2\sqrt{1 - 3/4 \sin^2 u}$. Como $\sqrt{1 - 3/4\sin^2 u}$ não possui primitiva imediata, o integral $\int_0^t \|\gamma'(u)\| du$ não pode ser calculado directamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral. (É um exemplo de *integral elíptico*.)

Um outro exemplo deste tipo é a curva dada por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $-\infty < t < \infty$.



Temos $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2, 9t^4}$. Como $\gamma'(t)$ nunca se anula, γ é regular. O comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (0,0,0)$ é

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\, du,$$

um outro exemplo de integral elíptico.

(2) Em segundo lugar, mesmo que se consiga determinar $s(t)$, poderá não ser possível encontrar a função inversa $s^{-1} : s(I) \to I$. Esse é o caso, por exemplo, se γ é dada por

$\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Com efeito, $\gamma'(t) = (1, t)$ e, consequentemente,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})).$$

Note-se que γ é uma simples parábola!

A parametrização dada pelo Teorema 2.10 é essencialmente a única reparametrização por comprimento de arco de uma curva regular:

Proposição 2.12. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $\alpha : J_1 \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ. Então $\beta : J_2 \to \mathbb{R}^3$ é também uma reparametrização por comprimento de arco de γ se e só se $\beta = \alpha \circ \lambda$, para $\lambda : J_2 \to J_1$ definida por $\lambda(t) = t + c$ ou $\lambda(t) = -t + c$, onde c é uma constante.*

Demonstração: É claro que esta condição é suficiente para que β seja também uma reparametrização por comprimento de arco:

$$\|\beta'(t)\| = |\lambda'(t)|\ \|\alpha'(\lambda(t))\| = \|\alpha'(\lambda(t))\| = 1.$$

Reciprocamente, se $\beta = \gamma \circ \lambda_2$ e $\alpha = \gamma \circ \lambda_1$ são reparametrizações por comprimento de arco de γ, então $\beta = \gamma \circ \lambda_2 = \alpha \circ \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$. Seja $\lambda = \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$. Temos $\beta'(t) = \lambda'(t)\alpha'(\lambda(t))$ e $\|\beta'(t)\| = |\lambda'(t)|\ \|\alpha'(\lambda(t))\|$. Mas, para qualquer $t \in J_2$, $\|\beta'(t)\| = 1 = \|\alpha'(\lambda(t))\|$, donde $|\lambda'(t)| = 1$. Consequentemente, $\lambda'(t) = 1$ ou $\lambda'(t) = -1$. Pelo Teorema do Valor Intermédio podemos afirmar mais: ou $\lambda'(t) = 1$ para qualquer $t \in J_2$ ou $\lambda'(t) = -1$ para qualquer $t \in J_2$. Portanto $\lambda(t) = t + c$ para qualquer $t \in J_2$ ou $\lambda(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J_2$. ∎

Observemos, por fim, que uma dada curva de nível pode ter parametrizações regulares e não regulares. Por exemplo, a parametrização $\gamma(t) = (t, t^2)$ da parábola $y = x^2$ é regular, mas a parametrização $\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$ já não é regular pois $\tilde{\gamma}(0) = 0$.

A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra "curva" estaremos a referir-nos a curvas regulares.

Exercícios

2.1 Determine parametrizações $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ das seguintes curvas de nível:

(a) Parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

(b) Circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Hipérbole $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1, y > 0\}$.

(d) Elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.

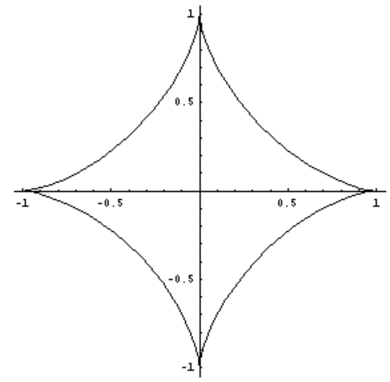
2.2 Será que $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ é uma parametrização da parábola $y = x^2$?

2.3 Determine as equações cartesianas dos *traços* $\gamma(\mathbb{R})$ das curvas planas definidas pelas seguintes parametrizações:

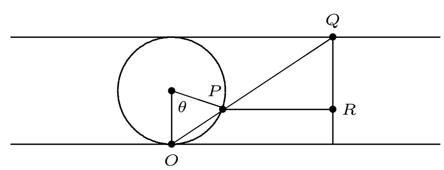
(a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$.

(b) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$.

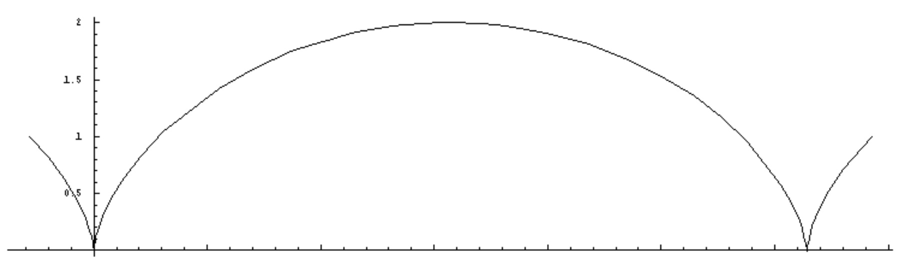
(c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ (*astróide*, na figura ao lado)



2.4 Seja P um ponto de uma circunferência C (no plano XOY) de raio $a > 0$ e centro $(0, a)$ e seja Q o ponto de intersecção da recta $y = 2a$ com a recta que passa pela origem e por P. Seja ainda R o ponto de intersecção da recta horizontal que passa por P com a recta vertical que passa por Q. À medida que P se move ao longo de C, R descreve uma curva chamada *curva de Agnesi*. Determine uma parametrização desta curva e a respectiva equação cartesiana.



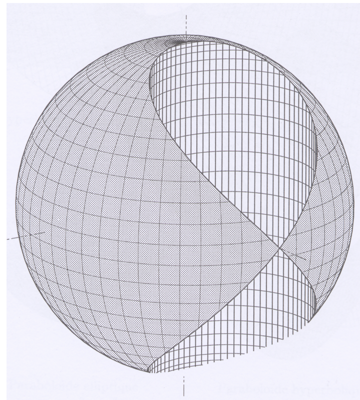
2.5 Considere um disco a rodar (sem escorregar) numa superfície plana, ao longo de uma linha recta. Chama-se *ciclóide* à curva plana descrita por um ponto nesse disco.



Mostre que, se a linha recta for o eixo OX e o disco tiver raio $a > 0$, a ciclóide pode ser parametrizada por $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

2.6 Generalize o exercício anterior, determinando uma parametrização da *epiciclóide* (resp. *hipociclóide*), isto é, da curva plana descrita por um ponto de um disco, quando este roda, sem escorregar, pela parte externa (resp. interna) do disco.

2.7 Mostre que $\gamma(t) = (\cos^2 t - 1/2, \sin t \cos t, \sin t)$ é uma parametrização da curva de intersecção do cilindro circular, de raio $1/2$ e eixo OZ, com a esfera de raio 1 e centro $(-1/2, 0, 0)$ (chamada *curva de Viviani*).



2.8 Calcule os vectores tangentes das curvas do Exercício 2.3. Em que pontos é que o vector tangente ao astróide se anula? Identifique-os na figura.

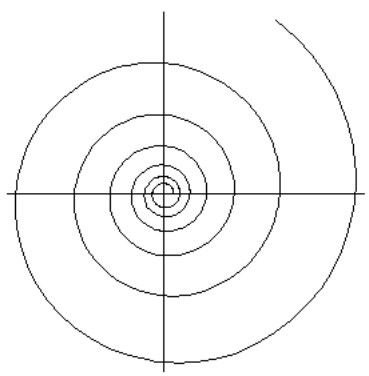
2.9 Determine as rectas tangentes às curvas dadas nos pontos indicados:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$, $t = \pi$.

(b) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^{-t}, t^2, 5 + t)$, $t = 0$.

2.10 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t, t)$. Prove que o traço de γ está contido num cilindro elíptico. Determine a velocidade de γ no ponto que está no plano $z = 0$.

2.11 Considere a *espiral logarítmica* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.



Mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vector tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.

2.12 Calcule o comprimento de arco da espiral logarítmica, a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$.

2.13 Calcule o comprimento de arco da *catenária* $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, a partir do ponto $(0, 1)$.

2.14 Mostre que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco:

(a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$.

2.15 Determine o comprimento de arco do ciclóide (Exercício 2.5) correspondente a uma revolução completa da circunferência.

2.16 Seja $\lambda : J \to I$ uma bijecção suave. Mostre que se λ' nunca se anula em J então λ^{-1} é também suave.

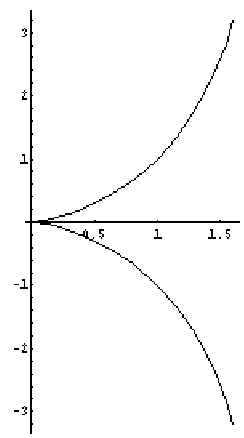
2.17 Seja $\lambda : (0,+\infty) \to (0,1)$ definida por $\lambda(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$. Prove que λ é uma mudança de parâmetro.

2.18 Seja $\lambda : (-1,1) \to (-\infty,+\infty)$ dada por $\lambda(t) = \tan(\frac{\pi}{2}t)$. Mostre que λ é uma mudança de parâmetro.

2.19 Prove que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma a que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

2.20 Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (t, \sin t, e^t)$. Prove que $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (\ln t, \sin(\ln t), t)$ é uma reparametrização de α.

2.21 A *cissóide de Diocles* é a curva cuja equação em termos de coordenadas polares (r,θ) é $r = \sin\theta\tan\theta$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$.



Escreva uma parametrização da cissóide usando θ como parâmetro e mostre que $\gamma(t) = (t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}})$ $(-1 < t < 1)$ é uma sua reparametrização.

2.22 Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$. Determine os valores de a e b para os quais $\gamma_{a,b}$ é regular.

2.23 Considere as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\beta(t) = (t^3, t^6)$, respectivamente. Prove que α e β têm o mesmo traço mas α é regular e β não o é.

2.24 Quais das seguintes curvas são regulares?

(a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.

(b) Curva da alínea anterior, mas com $t \in (0, \pi/2)$.

(c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.

Determine reparametrizações por comprimento de arco das que são regulares.

2.25 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

(a) Reparametrize γ por c. a. (b) Calcule o comprimento de arco de γ em $[0, \pi]$.

2.26 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco. Prove que:

(a) O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ são paralelas.

(b) O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ passam por um mesmo ponto fixo.

2.27 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que γ tem velocidade constante se e só se os vectores $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ são ortogonais, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

2.28 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular para a qual existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) - a$ e $\gamma'(t)$ são ortogonais. Mostre que γ é uma curva esférica.

2.29 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular e seja $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de γ com mudança de parâmetro λ (portanto $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\lambda(\tilde{t}))$). Seja $\tilde{t}_0 \in J$ e $t_0 = \lambda(\tilde{t}_0)$. Sendo s e $\tilde{s}$ os comprimentos de arco de γ e $\tilde{\gamma}$ a partir do ponto $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(\tilde{t}_0)$, prove que $\tilde{s} = s$ se $\lambda'(\tilde{t}) > 0$ para qualquer $\tilde{t} \in J$, e que $\tilde{s} = -s$ se $\lambda'(\tilde{t}) < 0$ para qualquer $\tilde{t} \in J$.

2.30 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\| \gamma^{'}(t) \| = a$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Prove que se α é uma reparametrização por comprimento de arco de γ então existe uma constante real c tal que $\alpha(t) = \gamma(t/a + c)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ ou $\alpha(t) = \gamma(-t/a + c)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.