3. Quanto é que uma curva curva? Curvatura e torsão; triedro de Frenet-Serret

Nesta secção associamos a cada curva duas funções escalares, chamadas curvatura e torsão. A curvatura mede quanto é que a curva se afasta de estar contida numa recta (portanto, linhas rectas têm curvatura zero), e a torsão mede quanto é que a curva se afasta de estar contida num plano (portanto, curvas planas têm torsão zero). Acontece que a curvatura e a torsão determinam completamente a forma da curva, como veremos mais tarde.

Comecemos por procurar uma medida da "curvatura" de uma curva, que meça em cada ponto o afastamento da curva relativamente à tangente à curva nesse ponto. Como esta "curvatura" só deverá depender do traço da curva,

(1) deverá ser inalterável por mudança de parâmetro (quando a curva é reparametrizada).

Além disso, deverá estar de acordo com a nossa intuição em casos especiais simples. Por exemplo:

(2) a curvatura de uma linha recta deverá ser zero;

(3) a curvatura de uma circunferência deverá ser constante, tanto maior quanto menor for o seu raio.

Com tudo isto em mente, encontramos a sugestão para a definição de curvatura na Proposição 2.3: se γ é uma curva com $\gamma''(t) = 0$ em cada t então o traço de γ é parte de uma linha recta e, por (2), deverá ter curvatura zero. Somos assim tentados a definir curvatura de γ no ponto $\gamma(t)$ como $\|\gamma''(t)\|$ (tomamos a norma porque queremos que a curvatura seja uma medida, ou seja, um escalar). Infelizmente, isto depende da parametrização de γ, contrariando (1). Temos assim, para não contrariar (1), que começar por nos restringirmos às curvas parametrizadas por comprimento de arco.

Definição 3.1. Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Chama-se *curvatura* de γ no ponto $\gamma(s)$, e denota-se por $\kappa(s)$, ao número $\|\gamma''(s)\|$.

Confirmemos que esta noção satisfaz as condições (1), (2) e (3):

(1) A recta que passa por um dado ponto $w \in \mathbb{R}^3$ e tem a direcção do vector $v \in \mathbb{R}^3$ ($\|v\| = 1$) tem uma parametrização por comprimento de arco dada por $\gamma(s) = sv + w$. É claro que $\kappa(s) = 0$ para qualquer s.

(2) Quanto à circunferência de raio $r > 0$, $\gamma(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r))$ é uma parametrização por comprimento de arco. Como

$$\gamma'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$$

e
$$\gamma''(s) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\Big),$$
obtemos
$$\kappa(s) = \sqrt{(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r})^2 + (-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r})^2} = \frac{1}{r}, \tag{3.1.1}$$
pelo que a curvatura da circunferência é inversamente proporcional ao seu raio.

(3) Sejam $\tilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\gamma}_2 : J \to \mathbb{R}^3$ duas reparametrizações por comprimento de arco de uma curva γ. Pela Proposição 2.12 sabemos que $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1 \circ \lambda_c$, onde $\lambda_c(t) = t + c$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda_c(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J$. Então $\tilde{\gamma}_2'(t) = \tilde{\gamma}_1'(\lambda_c(t))\lambda_c'(t)$. Como $\lambda_c''(t) = 0$ para qualquer t, obtemos
$$\tilde{\gamma}_2''(t) = \tilde{\gamma}_1''(\lambda_c(t))\lambda_c'(t)^2 = \tilde{\gamma}_1''(\lambda_c(t)).$$
Consequentemente,
$$\kappa_{\tilde{\gamma}_2}(t) = \|\tilde{\gamma}_2''(t)\| = \|\tilde{\gamma}_1''(s)\| = \kappa_{\tilde{\gamma}_1}(s)$$
onde $s = \lambda_c(t) \in I$.

E no caso geral, como devemos definir (e calcular) a curvatura de γ? Se γ é regular, sabemos existir, pelo Teorema 2.10, uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Então, para garantir a propriedade (1), bastará definir a *curvatura* de γ como sendo a curvatura da reparametrização $\tilde{\gamma}$ (ou de qualquer outra reparametrização por comprimento de arco). Portanto
$$\kappa_\gamma(t) := \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$
sendo λ a mudança de parâmetro correspondente. Como nem sempre é possível determinar explicitamente a reparametrização $\tilde{\gamma}$, necessitamos de uma fórmula para a curvatura em termos de γ e t somente.

Proposição 3.2. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva (regular). Então, para cada $t \in I$,*
$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

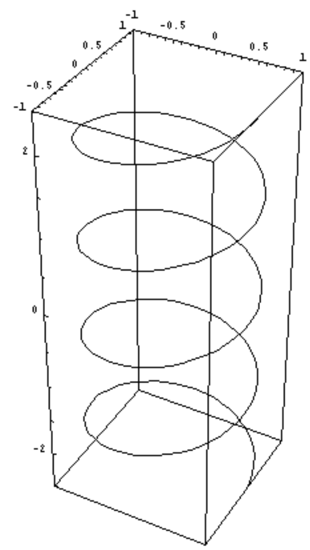
Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ, com mudança de parâmetro $\lambda : I \to J$. De $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ obtemos, por derivação, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$ e $\gamma''(t) = \lambda''(t)\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\tilde{\gamma}''(\lambda(t))$. Então
$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3\Big(\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) \wedge \tilde{\gamma}''(\lambda(t))\Big)$$
e, consequentemente,
$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = |\lambda'(t)|^3\, \|\tilde{\gamma}'(\lambda(t))\|\, \|\tilde{\gamma}''(\lambda(t))\|,$$
pois, pela Proposição 2.5, $\tilde{\gamma}'(\lambda(t))$ e $\tilde{\gamma}''(\lambda(t))$ são ortogonais. Mas $|\lambda'(t)| = \|\gamma'(t)\|$, $\|\tilde{\gamma}'(\lambda(t))\| = 1$ e $\|\tilde{\gamma}''(\lambda(t))\| = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \kappa_\gamma(t)$, pelo que
$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

■

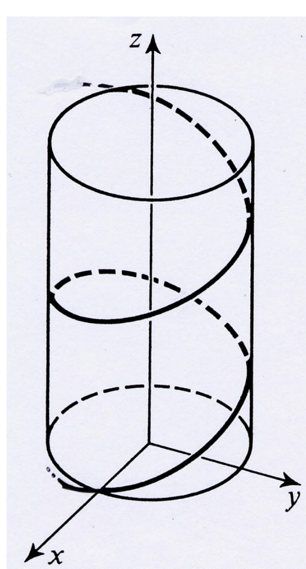
Exemplo 3.3. Consideremos a *hélice circular* de eixo vertical, definida por

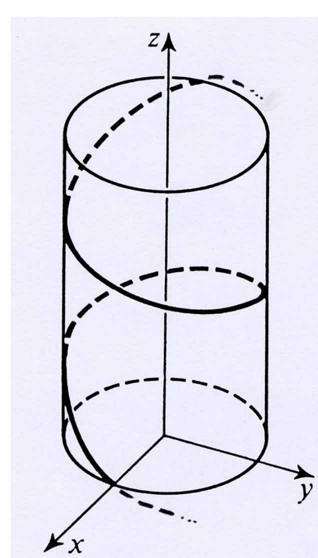
$$\gamma_{r,a}(t) = (r\cos t, r\sin t, at), \qquad (-\infty < t < \infty)$$

onde r e a são constantes reais.



Se (x, y, z) é um ponto no traço da hélice, então $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ e $z = at$ para algum $t \in \mathbb{R}$, logo $x^2 + y^2 = r^2$, mostrando que o traço da hélice está contido no cilindro vertical (eixo OZ) e raio $|r|$. O número positivo $|r|$ diz-se o *raio* da hélice. À medida que t cresce 2π unidades, o ponto $(r\cos t, r\sin t, at)$ efectua uma rotação em torno do eixo OZ e move-se na vertical, $2\pi a$ unidades; o número positivo $2\pi|a|$ chama-se *passo* da hélice circular (tomamos os valores absolutos pois não assumimos r e a positivos). As figuras seguintes mostram o traço da hélice circular, respectivamente no caso $a, r > 0$ e no caso $a < 0, r > 0$:





Reparametrizando $\gamma_{r,a}$ por comprimento de arco (Exercício 3.5) obtemos

$$\tilde{\gamma}_{r,a}(s) = \Big(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, a\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\Big),$$

donde segue

$$\kappa(s) = \|\tilde{\gamma}''_{r,a}(s)\| = \frac{|r|}{r^2+a^2}.$$

Portanto, a curvatura da hélice circular $\gamma_{r,a}$ é constante, diminuindo com o crescimento em valor absoluto de r ou de a.

Alternativamente, podíamos ter calculado a curvatura de $\gamma_{r,a}$ usando a fórmula da Proposição 3.2, evitando com isso a determinação da reparametrização por comprimento de arco. Como $\gamma'_{r,a}(t) = (-r\sin t, r\cos t, a)$, $\gamma''_{r,a}(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$ e $\gamma'_{r,a}(t)\wedge\gamma''_{r,a}(t) = (ra\sin t, -ra\cos t, r^2)$, obtemos

$$\kappa(t) = \frac{\|(ra\sin t, -ra\cos t, r^2)\|}{\|(-r\sin t, r\cos t, a)\|} = \frac{(r^2a^2+r^4)^{1/2}}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{|r|}{r^2+a^2}. \tag{3.3.1}$$

No caso limite $a=0$ (com $r\neq 0$), a hélice circular é simplesmente uma circunferência no plano horizontal XOY, de raio $|r|$, pelo que, por (3.1.1), a sua curvatura é $1/|r|$. Por outro lado, a fórmula (3.3.1) dá-nos também, como não podia deixar de ser, $|r|/r^2 = 1/|r|$. No outro caso limite $r=0$ (com $a\neq 0$), o traço da hélice é uma linha recta (o eixo OZ), pelo que a sua curvatura é 0 (e (3.3.1) dá-nos isso quando $r=0$).

Observámos (página 23) que a curvatura de uma recta é constantemente nula. A Proposição 2.3 diz-nos que o recíproco também é verdadeiro (pois $\kappa(s)=0$ para qualquer s implica que o vector $\gamma'(s)$ seja constante). Determinamos assim o significado geométrico da curvatura ser nula:

> *um segmento (troço) de uma curva tem curvatura nula se e só se está contido numa recta.*

Dada uma curva qualquer, podemos sempre particioná-la em segmentos, de tal modo que a curvatura se anula em todos os pontos de alguns desses segmentos e, nos restantes, só se anula eventualmente nos extremos. Nos primeiros segmentos já conhecemos a geometria da curva: segmentos de recta, semi-rectas ou rectas. Portanto só nos precisamos de preocupar em estudar os outros, onde a curvatura nunca se anula a não ser, eventualmente, nos pontos extremos.

Por esta razão, daqui em diante assumiremos que a curvatura κ nunca se anula.

Refira-se somente que nos pontos extremos (isolados) onde κ se anula (chamados *pontos de inflexão*) podem acontecer muitas coisas estranhas. Por exemplo, a curva (regular e suave) $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t<0 \\ (0,0,0) & \text{se } t=0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t>0, \end{cases}$$

tem curvatura nula em $t = 0$, o seu traço de $-\infty$ a 0 está contido num plano e o seu traço de 0 a $+\infty$ está contido noutro plano.

O exemplo da hélice circular acima mostra-nos que a curvatura não é suficiente para identificarmos completamente a forma de uma curva (isso só acontecerá para as curvas planas, como veremos). Com efeito, quer a circunferência de raio 1 no plano XOY quer a hélice circular de parâmetros $r = a = 1/2$ têm curvatura constante igual a 1, e são manifestamente curvas muito diferentes na sua forma (mais precisamente, é impossível levar uma até a outra por rotação e translação). Introduziremos então um outro tipo de curvatura para curvas não planas, chamada *torsão*, que medirá a variação do plano "osculador" da curva — ou, dito de outro modo, o quanto uma curva se afasta de ser plana.

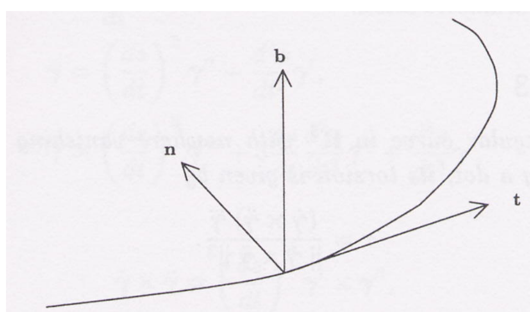
Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $T(s) = \gamma'(s)$ o seu vector tangente no ponto $\gamma(s)$. Se *a curvatura* $\kappa(s)$ *não for nula*, podemos definir o vector *normal principal* de γ no ponto $\gamma(s)$ como sendo o vector

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s). \tag{3.3.2}$$

$N(s)$ é um vector unitário (pois $\|T'(s)\| = \kappa(s)$), ortogonal a $T(s)$, pela Proposição 2.5. Consequentemente,

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \tag{3.3.3}$$

é um vector unitário perpendicular a $T(S)$ e a $N(s)$. Este vector chama-se *binormal* de γ no ponto $\gamma(s)$. Em conclusão, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$,



com orientação positiva (mesma orientação que a base canónica), isto é,

$$T(s) = N(s) \wedge B(s), \; N(s) = B(s) \wedge T(s), \; B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Em cada ponto $\gamma(s)$ temos três rectas e três planos especiais:

- *recta tangente*, paralela a $T(s)$;
- *recta normal principal*, paralela a $N(s)$;
- *recta binormal*, paralela a $B(s)$;
- *plano osculador*, paralelo a $T(s)$ e $N(s)$;

- *plano normal*, paralelo a $N(s)$ e $B(s)$;
- *plano rectificante*, paralelo a $T(s)$ e $B(s)$.

Como $B(s)$ é um vector unitário, $B'(s)$ é perpendicular a $B(s)$. Recordemos a regra de derivação para o produto vectorial de funções vectoriais F e G de parâmetro s:

$$(F \wedge G)'(s) = F'(s) \wedge G(s) + F(s) \wedge G'(s).$$

Aplicando-a a $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ obtemos

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s), \tag{3.3.4}$$

pois pela definição de $N(s)$, $T'(s) \wedge N(s) = \kappa(s)N(s) \wedge N(s) = 0$. A equação (3.3.4) mostra que $B'(s)$ também é perpendicular a $T(s)$. Então $B'(s)$ é necessariamente paralelo a $N(s)$, pelo que

$$B'(s) = -\tau(s)N(s), \tag{3.3.5}$$

para algum escalar $\tau(s)$, a que se chama *torsão* de γ no ponto $\gamma(s)$ (o sinal $-$ é simplesmente uma questão de convenção). Note que a torsão só está definida caso a curvatura seja não nula, e que, ao contrário da curvatura, pode assumir valores negativos.

Como no caso da curvatura, definimos torsão de uma curva regular arbitrária γ como sendo a torsão de uma sua reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Portanto

$$\tau_\gamma(t) := \tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$

sendo λ a mudança de parâmetro correspondente.

Para que esta definição faça sentido (não seja ambígua), temos que garantir que sendo $\tilde{\gamma}_1 : I \to \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\gamma}_2 : J \to \mathbb{R}^3$ duas reparametrizações por comprimento de arco da curva γ, a torsão calculada em $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ dá o mesmo resultado. Como $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1 \circ \lambda_c$, onde $\lambda_c(t) = t + c$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda_c(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J$, a mudança de parâmetro $t \mapsto s = \lambda_c(t)$ tem o seguinte efeito nos vectores introduzidos acima:

$$T_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \pm T_{\tilde{\gamma}_2},\ T'_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto T'_{\tilde{\gamma}_2},\ N_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto N_{\tilde{\gamma}_2},\ B_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \pm B_{\tilde{\gamma}_2},\ B'_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto B'_{\tilde{\gamma}_2}.$$

Consequentemente, $\tau_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \tau_{\tilde{\gamma}_2}$, pela equação (3.3.5), ou seja, $\tau_{\tilde{\gamma}_2}(t) = \tau_{\tilde{\gamma}_1}(s)$.

Tal como fizemos para a curvatura, é possível dar uma fórmula para a torsão, unicamente em termos de γ, sem requerer o conhecimento de uma reparametrização por comprimento de arco:

Proposição 3.4. *Seja γ uma curva (regular, cuja curvatura nunca se anula). Então*

$$\tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ, com mudança de parâmetro $\lambda : I \to J$. Vimos na demonstração da Proposição 3.2 que

$$\gamma''(t) = \lambda''(t)\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\tilde{\gamma}''(\lambda(t)) = \lambda''(t)T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\kappa_{\tilde{g}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))(T_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) \wedge N_{\tilde\gamma}(\lambda(t))) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) B_{\tilde\gamma}(\lambda(t))$$

e

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2 = \lambda'(t)^6 \ \kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\gamma'''(t) &= \lambda'''(t)T_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \lambda''(t)\lambda'(t)T'_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + 2\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \\
&\quad \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N'_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) \\
&= \lambda'''(t)T_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + 2\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \\
&\quad \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde\gamma}(\lambda(t))N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))\Big[-\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))T_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \\
&\quad \tau_{\tilde\gamma}(\lambda(t))B_{\tilde\gamma}(\lambda(t))\Big] \\
&= [\lambda'''(t) - \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))]T_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \\
&\quad [3\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde\gamma}(\lambda(t))]N_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) + \\
&\quad [\lambda'(t)^3\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))\tau_{\tilde\gamma}(\lambda(t))]B_{\tilde\gamma}(\lambda(t)).
\end{aligned}$$

e

$$[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|\gamma'''(t)) = \lambda'(t)^6\kappa_{\tilde\gamma}(\lambda(t))^2\tau_{\tilde\gamma}(\lambda(t)).$$

Portanto,

$$\frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \tau_{\tilde\gamma}(\lambda(t)) = \tau_\gamma(t).$$

■

Exemplo. Consideremos novamente a hélice circular $\gamma_{r,a}$ dada por $\gamma_{r,a}(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$. Neste caso (recorde o Exemplo 3.3)

$$\gamma'_{r,a}(t) \wedge \gamma''_{r,a}(t) = (ra\sin t, -ra\cos t, r^2) \ \text{ e } \ \|\gamma'_{r,a}(t) \wedge \gamma''_{r,a}(t)\|^2 = r^2(r^2+a^2).$$

Como $\gamma'''_{r,a}(t) = (r\sin t, -r\cos t, 0)$, então $[\gamma'_{r,a}(t), \gamma''_{r,a}(t), \gamma'''_{r,a}(t)] = r^2 a$ e

$$\tau(t) = \frac{r^2 a}{r^2(r^2+a^2)} = \frac{a}{r^2+a^2}.$$

Note que, neste caso, a torsão também é constante, como a curvatura.

Proposição 3.5. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva cuja curvatura nunca se anula. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *γ é plana (ou seja, o traço de γ está contido num plano);*

(ii) *para cada $t \in I$, $\tau(t) = 0$.*

Demonstração: Como para qualquer reparametrização por comprimento de arco $\tilde\gamma$ de γ se tem

- γ é plana se e só se $\tilde{\gamma}$ é plana
- $\tau_\gamma = \tau_{\tilde{\gamma}}$

então o resultado será válido para uma curva geral γ se e só se é válido para qualquer sua reparametrização por comprimento de arco. Bastará então provar o resultado para curvas parametrizadas por comprimento de arco.

(i)$\Rightarrow$(ii): Seja P o plano a que pertence o traço da curva γ. Consideremos um ponto p_0 desse plano e um vector unitário a perpendicular a esse plano. Então

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid (p - p_0|a) = 0\}$$

e a condição $\gamma(I) \subseteq P$ traduz-se em

$$\forall s \in I,\ (\gamma(s) - p_0|a) = 0.$$

Derivando sucessivamente obtemos

$$(T(s)|a) = 0 \ \text{ e } \kappa(s)(N(s)|a) = 0$$

para qualquer $s \in I$. Isto significa que a é perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$, para qualquer $s \in I$. Portanto a é paralelo ao vector binormal $B(s)$ em cada $s \in I$, ou seja, $B(s) = \lambda(s)a$ para algum escalar real $\lambda(s)$. Como $\|a\| = 1$ e $\|B(s)\| = 1$, temos $|\lambda(s)| = 1$. Em conclusão $B(s) = a$ ou $B(s) = -a$ para cada $s \in I$. Mas a função $B : I \to \mathbb{R}^3$ dada por $s \mapsto B(s)$ é suave, logo $B(s) = a$ para qualquer $s \in I$ ou $B(s) = -a$ para qualquer $s \in I$. Em ambos os casos a função B é constante pelo que, por (3.3.5), $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in I$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Por (3.3.5) a função binormal é constante, igual em cada s a um dado vector B. A implicação contrária sugere que $\gamma(I)$ está contido num plano perpendicular a B. Fixando $s_0 \in I$, terá que passar pelo ponto $\gamma(s_0)$. Verifiquemos então que $\gamma(I)$ está contido no plano $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid (p - \gamma(s_0)|B) = 0\}$, ou seja, $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$ para qualquer $s \in I$. Como $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)' = (T(s)|B) = (T(s)|B(s)) = 0$ para qualquer $s \in I$, a função $s \mapsto (\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)$ é constante. Por outro lado, em s_0 toma o valor $(\gamma(s_0) - \gamma(s_0)|B) = 0$. Portanto $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$ para qualquer $s \in I$. ■

Ficamos assim a conhecer o significado geométrico da torsão ser nula:

> *a curva está contida num plano (que é o plano osculador da curva em qualquer ponto, como a demonstração nos mostra).*

Mais geralmente, para uma curva geral γ, o plano osculador em cada ponto $\gamma(t)$ é o plano à qual γ, na vizinhança de $\gamma(t)$, está "mais próximo" de pertencer.

Há uma lacuna nos cálculos que efectuámos até agora que queremos preencher: já sabemos que, para curvas parametrizadas por comprimento de arco, $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ e $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Como se calcula $N'(s)$?

Da igualdade $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ decorre, por diferenciação,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s) \wedge T(s) + \kappa(s)B(s) \wedge N(s) \\ &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Em conclusão:

Teorema 3.6. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Então, para cada $s \in I$, temos:*

(1) $T'(s) = \kappa(s)N(s)$;

(2) $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$;

(3) $B'(s) = -\tau(s)N(s)$.

■

As equações (1)-(3) chamam-se *equações de Frenet-Serret*. Note que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

que exprime T', N' e B' em termos dos vectores da base T, N e B é *anti-simétrica*, isto é, é igual à negativa da sua transposta. Isto ajuda a memorizar as equações.

Já vimos como podemos determinar a curvatura e a torsão de qualquer curva γ sem precisarmos de determinar uma sua reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Como será para o triedro de Frenet-Serret?

Proposição 3.7.

(1) $T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \pm \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

(2) $B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \pm \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}$.

(Onde o sinal $+$ é tomado se a respectiva mudança de parâmetro λ preserva a orientação; caso contrário toma-se o sinal $-$.)

Demonstração: (1) De $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ decorre, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Consequentemente, como $\|\gamma'(t)\| = |\lambda'(t)|$, temos

$$T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\lambda'(t)} = \pm \frac{\gamma'(t)}{|\lambda'(t)|} = \pm \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

(2) Já vimos na demonstração da Proposição 3.4 que

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

Portanto $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = |\lambda'(t)|^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$ e

$$\frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} = \pm B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

■

Observação. O vector $N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$ calcula-se através do produto vectorial $B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \wedge T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$.

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva. Define-se

$$T_\gamma(t) = T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$$

para cada $t \in I$, onde $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização por comprimento de arco cuja mudança de parâmetro preserva a orientação. Analogamente, definem-se

$$N_\gamma(t) = N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),\ B_\gamma(t) = B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

Neste caso geral, como se calculam as derivadas T', N' e B'?

$$T'_\gamma(t) = \lambda'(t) T'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = v_\gamma(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = v_\gamma(t)\kappa_\gamma(t) N_\gamma(t),$$

onde $v_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| = |\lambda'(t)| = \lambda'(t)$ é a *velocidade* de γ no ponto $\gamma(t)$.

Analogamente,

$$N'_\gamma(t) = -v_\gamma(t)\kappa_\gamma(t) T_\gamma(t) + v_\gamma(t)\tau_\gamma(t) B_\gamma(t)$$

e

$$B'_\gamma(t) = -v_\gamma(t)\tau_\gamma(t) N_\gamma(t).$$

Em resumo, no caso geral as fórmulas de Frenet-Serret têm a forma

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = v_\gamma \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Vejamos uma aplicação simples das fórmulas de Frenet-Serret:

Proposição 3.8. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva com torsão nula e curvatura constante κ. Então o traço de γ está contido numa circunferência de raio $1/\kappa$.*

Demonstração: Pela demonstração da Proposição 3.5, o vector binormal B é constante e o traço de γ está contido num plano perpendicular a B. Consideremos os pontos $p(t) = \gamma(t) + (1/\kappa)N(t)$. Como $p'(t) = v(t)T(t) + (1/\kappa)N'(t) = v(t)T(t) - v(t)T(t) = 0$ (pela segunda fórmula de Frenet-Serret), $p(t)$ é constante, digamos $p(t) = p_0$ para qualquer $t \in I$. Além disso, para cada $t \in I$, $\|\gamma(t) - p_0\| = \| - (1/\kappa)N(t)\| = 1/\kappa$, o que mostra que todos os pontos da curva γ estão contidos na circunferência de centro p_0 e raio $1/\kappa$.

■

Exercícios

3.1 Determine as curvaturas das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$

(c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ (d) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

No caso do astróide em (d), mostre que a curvatura tende para ∞ à medida que nos aproximamos dos pontos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Compare com a figura do Exercício 2.3.

3.2 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva (regular) parametrizada por comprimento de arco, esférica. Prove que a curvatura de γ nunca se anula.

3.3 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Prove que

$$\kappa_\gamma(s) = |\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)|,$$

onde γ_1 e γ_2 denotam as funções componente de γ.

3.4 Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definidas por $\alpha(t) = (t, p + qt + rt^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, a + be^{ct}, d)$, em que p, q, r, a, b, c e d são constantes. Estabeleça uma condição necessária e suficiente, envolvendo as constantes, para que $\kappa_\alpha(0) = \kappa_\beta(0)$.

3.5 Considere a *hélice circular* $\gamma_{r,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma_{r,a}(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$, r constante positiva e a constante não nula. Calcule a curvatura e a torsão de qualquer reparametrização por comprimento de arco de $\gamma_{r,a}$.

3.6 Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula e $\beta = \alpha \circ \lambda$ uma sua reparametrização. Prove que

$$\tau_\alpha(\lambda(t)) = [\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)]/\| \beta'(t) \wedge \beta''(t) \|^2.$$

3.7 Calcule a curvatura e a torsão da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

3.8 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Mostre que $\kappa = \tau$.

3.9 Prove que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco e calcule o seu triedro de Frenet-Serret:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (\frac{5}{13}\cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s)$;

(b) $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}})$.

3.10 Calcule o triedro de Frenet-Serret das curvas:

(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. (b) $\gamma(t) = (t - \cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3.11 Determine τ, T, N, B para as curvas dos Exercícios 3.1 (a) e (b). Verifique que as equações de Frenet-Serret são satisfeitas.

3.12 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa, \tau > 0$. Seja ainda $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva tal que $\alpha'(s) = B_\gamma(s)$. Determine o triedro de Frenet--Serret, a curvatura e a torsão de α.

3.13 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\gamma(t) = (te^{-t}, (t+1)e^{-t})$. Verifique se alguma das rectas tangentes de γ passa pelo ponto $(0, 0)$.

3.14 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$. Determine a recta tangente e o plano normal a γ em cada ponto $\gamma(t)$.

3.15 (a) Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura é positiva. Prove que se todo o plano normal de γ passa por um ponto fixo então γ é esférica.

(b) Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (-\cos 2t, -2\cos t, \sin 2t)$. Prove que γ é uma curva esférica, mostrando que todos os planos normais de γ passam pelo ponto $(-1, 0, 0)$.

3.16 Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, -t^2/2, 0)$. Determine todos os valores reais t nos quais a recta tangente a α em $\alpha(t)$ e a recta normal a β em $\beta(t)$ têm a mesma direcção.

3.17 Determine uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que as rectas normais da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, \phi(t))$, a uma constante não nula, sejam paralelas ao plano de equação $z = 0$.

3.18 Considere a hélice circular $\gamma_{r,a}$ do Exercício 3.5. Determine:

(a) A recta binormal em cada ponto $\gamma_{r,a}(t)$;

(b) O plano rectificante em $\gamma_{r,a}(t)$.

3.19 Sejam $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ duas curvas não necessariamente parametrizadas por comprimento de arco e com curvaturas positivas. Diz-se que α e β são *curvas de Bertrand* se, para cada $t \in I$, as rectas normal principal de α em $\alpha(t)$ e normal principal de β em $\beta(t)$ coincidem.

Prove que:

(a) $||\alpha(t) - \beta(t)||$ não depende de t;

(b) O ângulo formado pelos vectores $T_\alpha(t)$ e $T_\beta(t)$ não depende de t.

3.20 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t + 1, 2t^3, -t^2)$.

(a) Mostre que τ é sempre positiva.

(b) Dado um ponto da forma $(1, 0, z)$, $z > 0$, prove que existem três pontos da curva onde os planos osculadores de γ passam por aquele ponto.

3.21 Considere a curva $\gamma_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma_{a,b,c}(t) = (3at, 3bt^2, ct^3)$, onde a, b e c são constantes não nulas. Prove que:

(a) A equação do plano osculador no ponto $\gamma_{a,b,c}(1)$ é $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;

(b) A recta tangente a $\gamma_{a,b,c}$ no ponto $\gamma_{a,b,c}(t)$ intersecta o plano da alínea anterior no ponto $(a(2t + 1), bt(t + 2), ct^2)$.

3.22 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

(a) Prove que o ângulo definido pelo vector binormal de γ em $\gamma(t)$ e pelo vector $(0, 0, a)$, $a \neq 0$, é constante.

(b) Prove que a recta normal principal de γ em $\gamma(t)$ é paralela ao plano de equação $z = 0$ e intersecta o eixo OZ.