4. Curvas planas

Nesta secção veremos que no caso planar é possível refinar a definição de curvatura, de modo a dar-lhe uma interpretação geométrica interessante. Provaremos ainda o Teorema Fundamental, que garante que uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, é determinada essencialmente pela sua curvatura com sinal ("essencialmente" significa "a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^2$).

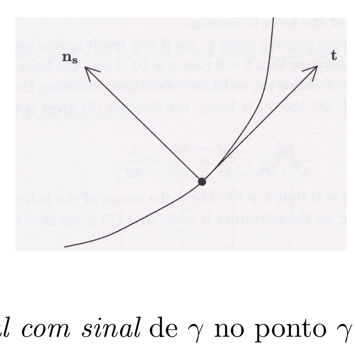
Pela Proposição 3.5, uma curva γ é plana (isto é, o seu traço está contido num plano) se e só se tem torsão $\tau = 0$. Neste caso as fórmulas de Frenet-Serret reduzem-se a

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T, \quad B' = 0. \qquad (*)$$

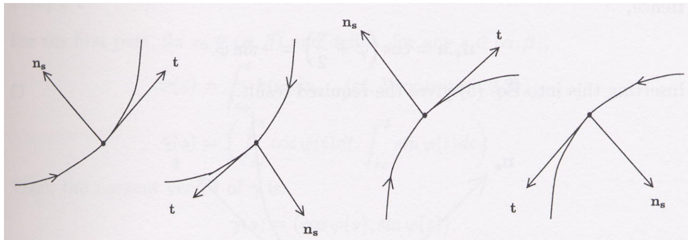
Se escolhermos o sistema de coordenadas de modo a que os eixos OX e OY estejam situados no plano da curva, a terceira componente do vector de posição de cada ponto $\gamma(t)$ é nula e todas as fórmulas se simplificam. Além disso, fixando uma orientação do plano em questão, podemos estabelecer um sentido positivo de rotação no plano. Consequentemente, a medida do ângulo formado por um par ordenado de vectores pode ser expressa por números positivos ou negativos, indicando assim, além do valor absoluto do ângulo de rotação, o sentido de rotação que leva o primeiro vector até ao segundo.

Em qualquer curva plana, o vector tangente e o vector normal principal estão ambos no plano da curva. Por outro lado, o vector binormal é constante e perpendicular ao plano, pelo que pode ser negligenciado e o triedro de Frenet-Serret reduzir-se-à ao par (T, N).

Suponhamos então que $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, e fixemos, para *sentido positivo* de rotação no plano da curva, o sentido oposto ao movimento dos ponteiros do relógio. Usando esta orientação, vamos substituir o vector normal principal $N(s)$ pelo vector unitário colinear $N_{\mathbf{s}}(s)$ tal que o par $(T(s), N_{\mathbf{s}}(s))$ está orientado positivamente (ou seja, $N_{\mathbf{s}}(s)$ obtem-se de $T(s)$ por rotação de um ângulo recto, no sentido positivo):



$N_{\mathbf{s}}(s)$ chama-se *vector normal com sinal* de γ no ponto $\gamma(s)$. Claro que $N_{\mathbf{s}}(s) = \alpha N(s)$ onde α é igual a 1 ou -1, dependendo da parametrização da curva. A figura seguinte mostra os diferentes casos que podem ocorrer: no primeiro e último casos α é 1 e nos outros dois é -1 (em cada caso, a seta na curva indica a direcção crescente do parâmetro s).



Se $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$, é evidente que:

Proposição 4.1. $T(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s))$ *e* $N_\mathbf{s}(s) = (-\gamma_2'(s), \gamma_1'(s))$. ∎

Mais geralmente (cf. Exercício 4.4), no caso de uma parametrização arbitrária $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, temos

$$T(t) = \Big(\frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}\Big)$$

e

$$N_\mathbf{s}(t) = \Big(-\frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}\Big).$$

Pela Proposição 2.5, $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$, logo é paralelo a $N_\mathbf{s}(s)$. Portanto, existe um escalar real $\kappa_\mathbf{s}(s)$ tal que

$$T'(s) = \kappa_\mathbf{s}(s) N_\mathbf{s}(s). \tag{4.1.1}$$

O escalar $\kappa_\mathbf{s}(s)$ chama-se *curvatura com sinal* de γ no ponto $\gamma(s)$ (pode ser positivo, negativo ou nulo). Note que, como $N_\mathbf{s}(s)$ é unitário, $\kappa(s) = \|T'(s)\| = |\kappa_\mathbf{s}(s)|$. Portanto $\kappa_\mathbf{s}$ só pode diferir de κ no sinal:

$$\kappa_\mathbf{s}(s) = \alpha\kappa(s), \quad (\alpha = \pm 1).$$

O sinal indica em que direcção a curva (ou melhor, a sua tangente) está a rodar. Assim $\kappa_\mathbf{s} > 0$ indica que a tangente está a rodar no sentido positivo (primeiro e último casos na figura anterior) enquanto $\kappa_\mathbf{s} < 0$ indica que roda no sentido negativo (segundo e terceiro casos da figura).

As fórmulas $(*)$ podem então ser substituídas simplesmente por

$$T' = \kappa_\mathbf{s} N_\mathbf{s}, \quad N_\mathbf{s}' = -\kappa_\mathbf{s} T.$$

Note que $\kappa_\mathbf{s}$ (ao contrário de κ) muda de sinal quando a curva é reparametrizada por uma mudança de parâmetro que inverte a orientação.

A curvatura com sinal tem uma interpretação geométrica simples:

Proposição 4.2. *Seja $\theta(s)$ o ângulo que um dado vector fixo tem que rodar no sentido positivo para coincidir com o vector tangente $T(s)$. Então $\kappa_\mathbf{s}(s) = \theta'(s)$.*

Demonstração: Seja u tal vector fixo (que podemos assumir unitário) e seja v o vector unitário obtido por rotação, no sentido positivo, de $\pi/2$ radianos. Então

$$T(s) = \cos\theta(s)u + \sin\theta(s)v$$

e

$$T'(s) = (-\sin\theta(s)u + \cos\theta(s)v)\theta'(s).$$

Portanto $(T'(s)|u) = -\sin\theta(s)\theta'(s)$. Por outro lado, pela definição de $\kappa_{\mathbf{s}}$, temos $(T'(s)|u) = \kappa_{\mathbf{s}}(s)(N_{\mathbf{s}}(s)|u)$, e como o ângulo entre $N_{\mathbf{s}}(s)$ e u é igual a $\pi/2 + \theta(s)$, $(T'(s)|u) = \kappa_{\mathbf{s}}(s)\cos(\theta(s)+\pi/2) = -\kappa_{\mathbf{s}}(s)\sin\theta(s)$. Em conclusão, $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \theta'(s)$. ■

Podemos agora determinar uma fórmula para o cálculo da curvatura com sinal:

Corolário 4.3. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$. Então*

$$\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s).$$

Demonstração: Como $(\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)) = T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, temos $\gamma_1''(s) = -\theta'(s)\sin\theta(s)$ e $\gamma_2''(s) = \theta'(s)\cos\theta(s)$. Consequentemente, pela proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \theta'(s) &= \begin{vmatrix} \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ -\theta'(s)\sin\theta(s) & \theta'(s)\cos\theta(s) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ \gamma_1''(s) & \gamma_2''(s) \end{vmatrix} \\
&= \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s).
\end{aligned}$$

■

É fácil de ver (Exercício 4.4) que, no caso de uma parametrização arbitrária $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, a curvatura com sinal é dada pela fórmula

$$\kappa_{\mathbf{s}}(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2)^{3/2}}.$$

A Proposição 4.2 também nos permite deduzir o Teorema Fundamental das curvas planas, que assegura que uma curva parametrizada por comprimento de arco fica essencialmente determinada a partir do momento em que conhecemos a curvatura com sinal em cada ponto da curva. O significado de "essencialmente" é "a menos de um movimento rígido" de $\mathbb{R}^2$. Recordemos que um *movimento rígido* de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma $\mathcal{M} = \mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_\theta$, onde $\mathcal{R}_\theta$ é uma rotação de ângulo θ, em torno da origem, no sentido positivo, e $\mathcal{T}_a$ é a translação definida pelo vector a:

$$\mathcal{R}_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

$$\mathcal{T}_a(v) = v + a.$$

Teorema 4.4. [Teorema fundamental das curvas planas] *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ cuja curvatura com sinal coincide com f.*

E mais: se $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ é outra curva parametrizada por comprimento de arco nessas condições, então existe um movimento rígido $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\tilde{\gamma}(s) = \mathcal{M}(\gamma(s)).$$

Demonstração: A ideia para obtermos a curva γ que prove a primeira parte do Teorema é evidente de 4.2: fixemos $s_0 \in I$ e definamos, para cada $s \in I$,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} f(u)\,du,$$

$$\gamma(s) = \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\,dt\Big).$$

Esta curva γ satisfaz as condições exigidas: está parametrizada por comprimento de arco pois $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$; como este vector faz um ângulo $\theta(s)$ com o eixo OX, pela Proposição 4.2 a sua curvatura com sinal é igual a $\theta'(s) = f(s)$.

Para provar a segunda parte do Teorema, seja $\tilde{\theta}(s)$ o ângulo entre OX e o vector tangente $\tilde{\gamma}'(s)$ de $\tilde{\gamma}$. Então $\tilde{\gamma}'(s) = (\cos\tilde{\theta}(s), \sin\tilde{\theta}(s))$. Consequentemente,

$$\tilde{\gamma}(s) = \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\tilde{\theta}(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\tilde{\theta}(t)\,dt\Big) + \tilde{\gamma}(s_0). \tag{4.4.1}$$

Por outro lado, pela Proposição 4.2, $\tilde{\theta}'(s) = f(s)$, pelo que

$$\tilde{\theta}(s) = \int_{s_0}^{s} f(u)\,du + \tilde{\theta}(s_0) = \theta(s) + \tilde{\theta}(s_0).$$

Inserindo isto em (4.4.1) e denotando $\tilde{\gamma}(s_0)$ por a e $\tilde{\theta}(s_0)$ por θ_0, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(s) &= \mathcal{T}_a\Big(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t)+\theta_0)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t)+\theta_0)\,dt\Big)\\
&= \mathcal{T}_a\Big(\cos\theta_0 \int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\,dt - \sin\theta_0 \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\,dt,\\
&\qquad \sin\theta_0 \int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\,dt + \cos\theta_0 \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\,dt\Big)\\
&= \mathcal{T}_a\mathcal{R}_{\theta_0}\Big(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\,dt\Big)\\
&= \mathcal{T}_a\mathcal{R}_{\theta_0}(\gamma(s)).
\end{aligned}$$

■

Exemplos 4.5. (1) Seja $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura é constante, igual a $k > 0$. Então $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \pm k$ para cada $s \in I$, mas como $\kappa_{\mathbf{s}}$ é uma função suave, $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = k$ para qualquer s ou $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = -k$ para qualquer

s. Vejamos o que acontece no primeiro caso (o outro discute-se de modo análogo). Pelo Teorema existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuja curvatura com sinal é constante, igual a k, e $\tilde{\gamma}$ é o resultado da aplicação de um movimento rígido a γ. Determinemos tal curva γ:

Como $\theta(s) = \int_0^s k\, du = ks$,

$$\gamma(s) = \Big(\int_0^s \cos(kt)\, dt, \int_0^s \sin(kt)\, dt\Big) = \Big(\frac{\sin(ks)}{k}, -\frac{\cos(ks)}{k} + \frac{1}{k}\Big).$$

Fazendo $R = 1/k$ vem

$$\Big(R\sin\frac{s}{r}, -R\cos\frac{s}{r} + R\Big) = \mathcal{T}_a\Big(R\sin\frac{s}{r}, -R\cos\frac{s}{r}\Big),$$

onde $a = (0, R)$. Já vimos que

$$\Big(R\sin\frac{s}{r}, -R\cos\frac{s}{r}\Big)$$

é uma parametrização por comprimento de arco da circunferência de raio R e centro $(0,0)$, pelo que o traço de γ é a circunferência de raio R e centro $(0, R)$. Em conclusão, como rotações e translações transformam circunferências em circunferências, o traço de $\tilde{\gamma}$ é também uma circunferência.

(2) A demonstração do Teorema fornece-nos um algoritmo que permite, a partir de qualquer função suave f, determinar uma curva plana cuja curvatura com sinal coincida com f. Mas mesmo funções simples podem conduzir a curvas complicadas. Por exemplo, suponhamos que f é a função identidade $f(s) = s$. Seguindo o algoritmo, tomando $s_0 = 0$, obtemos

$$\theta(s) = \int_0^s u\, du = \frac{s^2}{2}$$

e

$$\gamma(s) = \Big(\int_0^s \cos(\frac{t^2}{2})\, dt, \int_0^s \sin(\frac{t^2}{2})\, dt\Big).$$

Contudo, estes integrais (que aparecem na teoria da difracção da luz, onde são chamados *integrais de Fresnel*), não podem ser expressos em termos de funções “elementares”. Só usando métodos numéricos ou tabelas especiais podemos determinar as coordenadas de $\gamma(s)$ num dado valor de s. No entanto, é simples obter uma ideia do traço da curva. Com efeito,

$$\lim_{s\to+\infty} \gamma_1(s) = \lim_{s\to+\infty} \gamma_2(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

e

$$\lim_{s\to-\infty} \gamma_1(s) = \lim_{s\to-\infty} \gamma_2(s) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Além disso, $\gamma_2'(0) = \gamma_2''(0) = 0$. Portanto, a curva tem um ponto de inflexão em $\gamma(0) = (0,0)$ e aproxima-se assimptoticamente do ponto

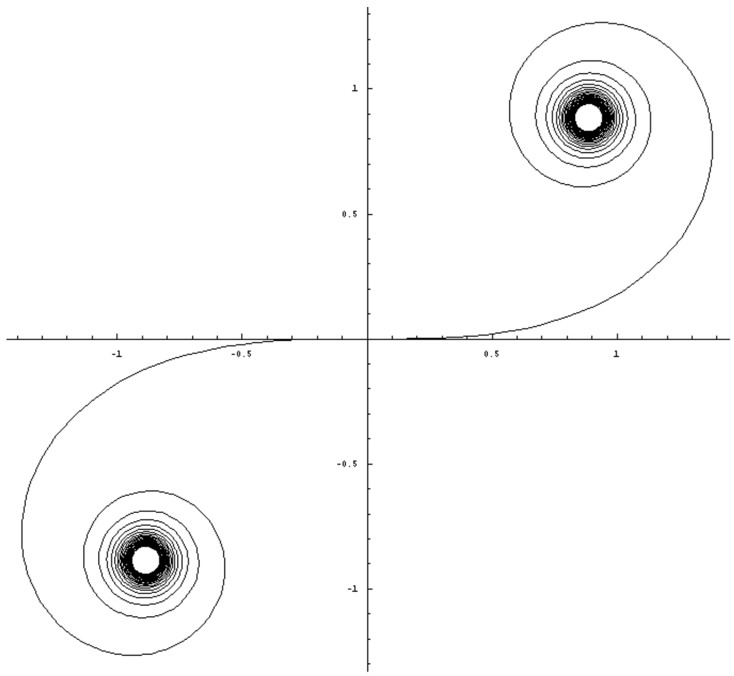
$$P_1 = \Big(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Big)$$

quando $s \to +\infty$; o mesmo se passa relativamente ao ponto

$$P_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

quando $s \to -\infty$.

A figura seguinte, obtida com o programa Mathematica (que calcula os integrais por aproximação numérica), mostra isso mesmo.



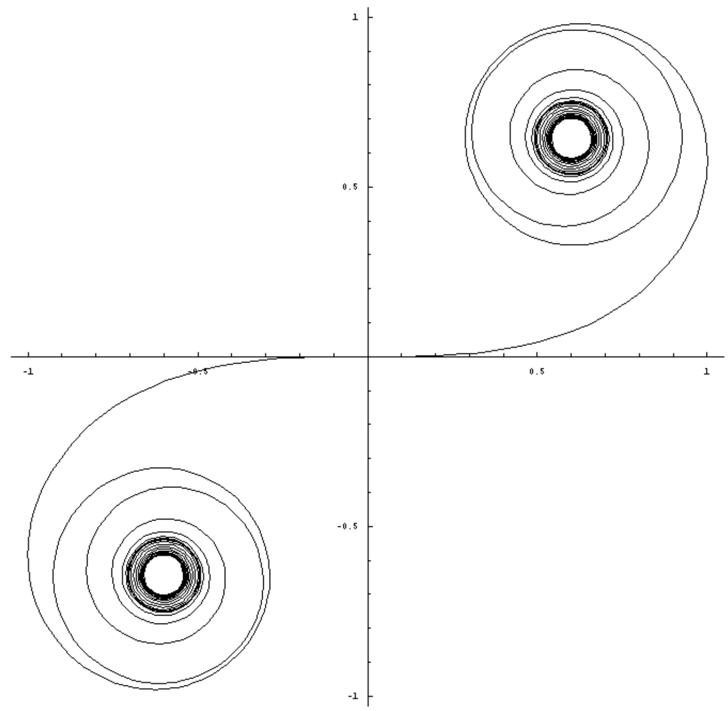
A implementação do algoritmo do Teorema na linguagem do Mathematica é muito simples (como vimos na aula). Com efeito, definindo a rotina

```
plotintrinsic[fun_,a:_0,{c_:0,d_:0,theta0_:0},optsnd___,}
{smin_:-10,smax_:10},optspp___]:=
ParametricPlot[Module[{x,y,theta},
{x[t],y[t]} /.
NDSolve[{x'[ss]==Cos[theta[ss]],
y'[ss]==Sin[theta[ss]],
theta'[ss]==fun[ss],
x[a]==c,y[a]==d,theta[0]==theta0},
{x,y,theta},{ss,smin,smax},optsnd]]//Evaluate,
{t,smin,smax},AspectRatio->Automatic,optspp];
```

bastará depois escrevermos, por exemplo,

```
plotintrinsic[(#+Sin[#])&,0,{0,0,0},{-18,18},PlotPoints->80];
```

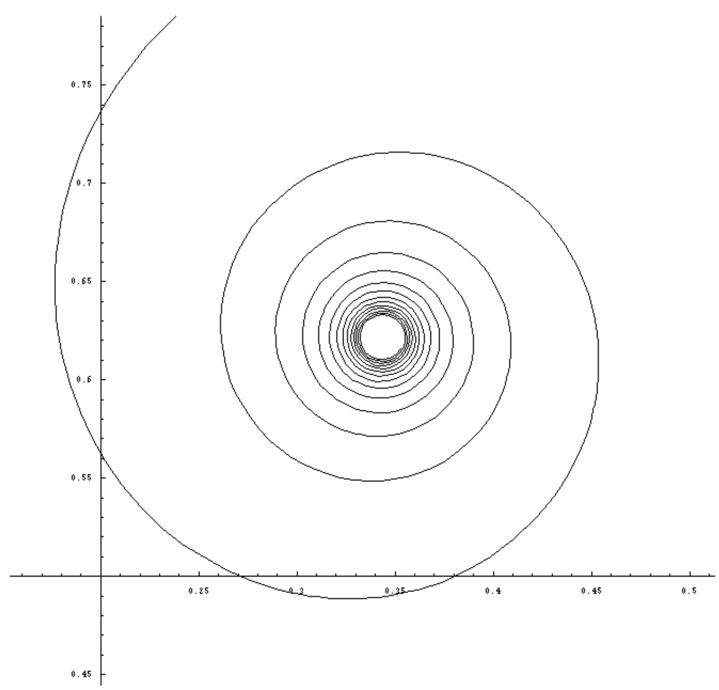
para obtermos o gráfico, para $s \in]-18, 18[$, da curva cuja curvatura é dada pela função $f(s) = s + \sin s$:



As figuras seguintes mostram alguns dos exemplos apresentados na aula:

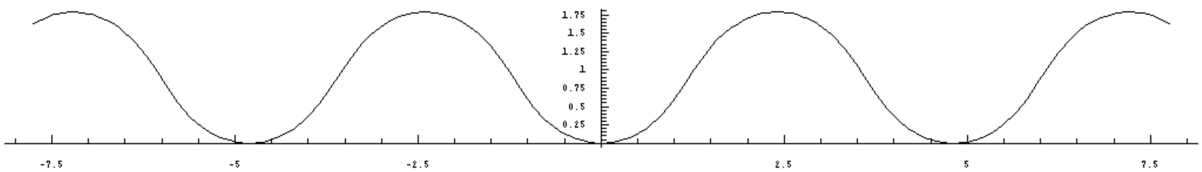
```
plotintrinsic[(Exp[#])&,0,{0,0,0},{-4.5,4.5},PlotPoints->80];
```

$f(s) = e^s$



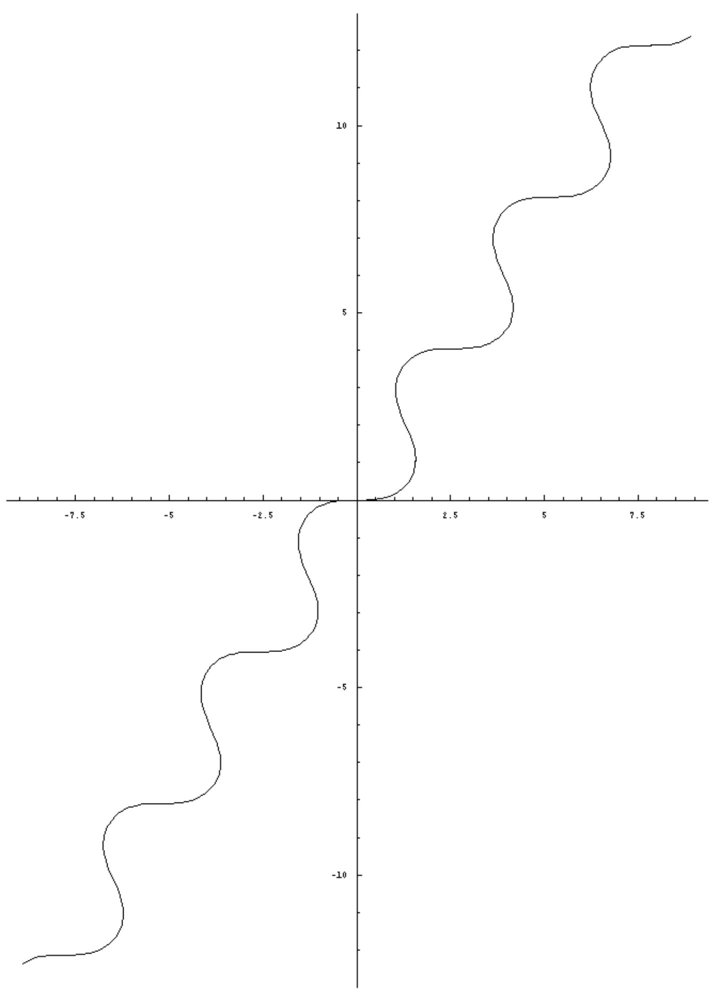
```
plotintrinsic[(Cos[#])&,0,{0,0,0},{-10,10},PlotPoints->80];
```

$f(s) = \cos s$



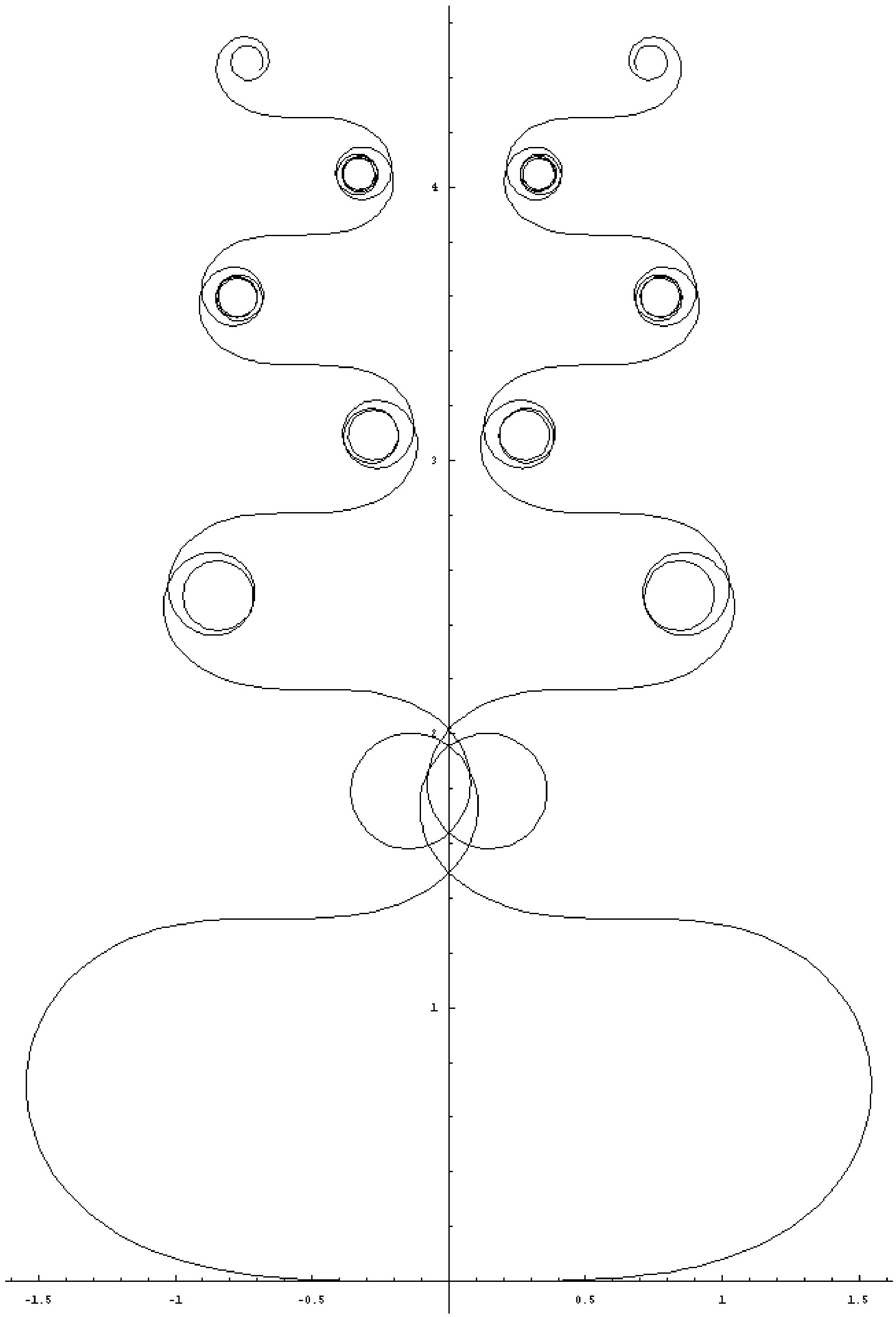

```
plotintrinsic[(Sin[#])&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$f(s) = \sin s$



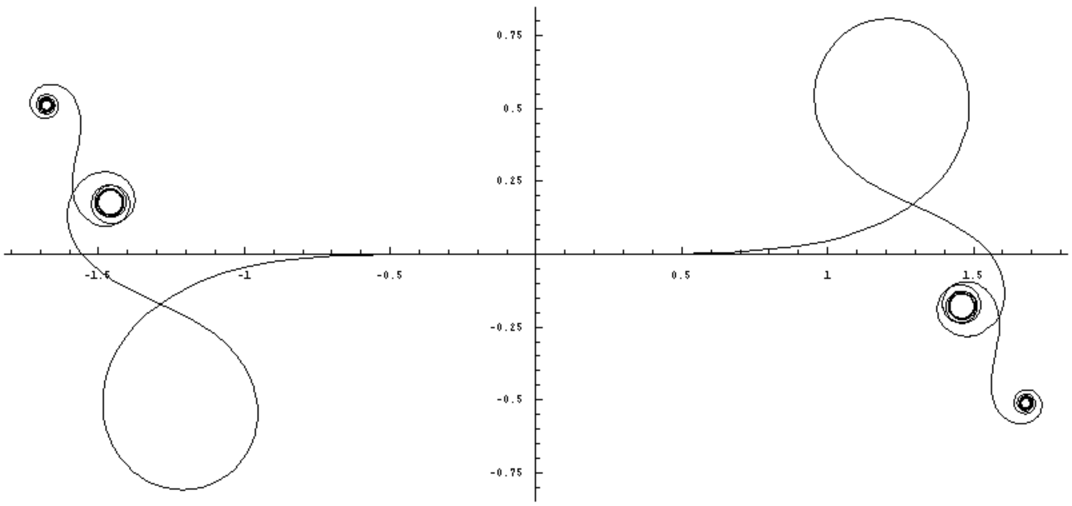
```
plotintrinsic[(#Sin[#])&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$f(s) = s \sin s$



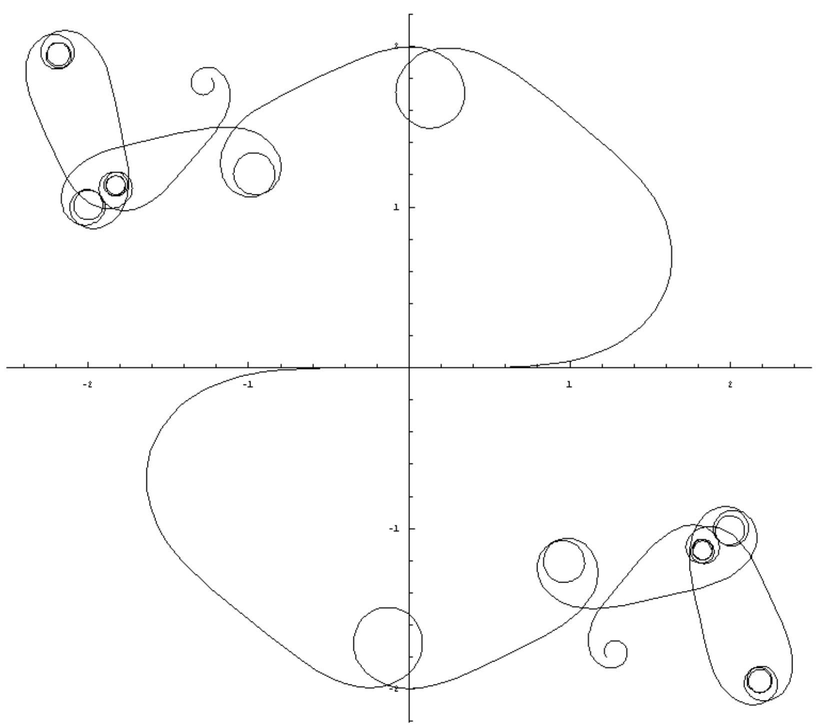
```
plotintrinsic[(#^2Sin[#])&,0,{0,0,0},{-8,8},PlotPoints->80];
```

$f(s) = s^2 \sin s$




```
plotintrinsic[(#Sin[#]^2)&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$f(s) = s \sin^2 s$



Exercícios

4.1 Prove que a curva $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t},)$ é plana.

4.2 Mostre que o traço da curva do Exercício 3.1(b) é uma circunferência, e determine o seu centro e o seu raio. Em que plano se encontra essa circunferência?

4.3 Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que o vector w que se obtem de v por uma rotação, no sentido positivo, de um ângulo recto, tem coordenadas $(-v_2, v_1)$.

4.4 Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana e denote por γ_1 e γ_2 as respectivas funções componente. Prove que:

(a) $T(t) = \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}}\right)$;

(b) $N_{\mathbf{s}}(t) = \left(-\frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}}, \frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2}}\right)$;

(c) $\kappa_{\mathbf{s}}(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t)-\gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{((\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2)^{3/2}}$.

4.5 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco e com curvatura positiva. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva não necessariamente parametrizada por comprimento de arco tal que, para cada $t \in I$, a recta tangente a α em $\alpha(t)$ é a recta normal a γ em $\gamma(t)$. Prove que, para cada $t \in I$,

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_\gamma(t)} N_\gamma(t).$$

4.6 Determine explicitamente a curva plana parametrizada por comprimento de arco tal que:

(a) $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = 2$;

(b) $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = s^{-1/2}$;

(c) $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \frac{1}{s+a}$ (a constante);

(d) $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \frac{a}{a+s^2}$ (a constante).

4.7 (a) Considere a espiral logarítmica $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma_a(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)$, sendo a uma constante não nula. Mostre que existe uma única reparametrização por comprimento de arco

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a : J &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \tilde{\gamma}_a(s) \end{aligned}$$

tal que

- $J \subseteq (0, +\infty)$ e
- $s \to 0$ quando $t \to -\infty$ (caso $a > 0$) ou $t \to +\infty$ (caso $a < 0$).

Determine a correspondente mudança de parâmetro, que ao parâmetro $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder o parâmetro $s \in J$, e mostre que a curvatura com sinal de γ_a é igual a $1/as$.

(b) Descreva toda a curva cuja curvatura com sinal, como função do parâmetro s por comprimento de arco, é igual a $1/as$ para alguma constante não nula a.

4.8 Uma dada curva plana γ parametrizada por comprimento de arco tem a seguinte propriedade: o seu vector tangente $T(s)$ faz um ângulo constante θ com $\gamma(s)$, para todo o s. Mostre que:

(a) se $\theta = 0$ então o traço de γ é parte de uma linha recta;

(b) se $\theta = \pi/2$ então o traço de γ é uma circunferência;

(c) se $0 < \theta < \pi/2$ então o traço de γ é uma espiral logarítmica (exercício anterior).

4.9 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, e seja c uma constante. A *curva paralela* γ^c é definida por $\gamma^c(t) = \gamma(t) + cN_{\mathbf{s}}(t)$. Prove que, se $|c\kappa_{\mathbf{s}}(t)| < 1$ para qualquer $t \in I$, então γ^c é uma curva regular e a sua curvatura com sinal é igual a $\kappa_{\mathbf{s}}/(1 - c\kappa_{\mathbf{s}})$.

4.10 Seja γ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Define-se o *centro de curvatura* $\epsilon(s)$ de γ no ponto $\gamma(s)$ por

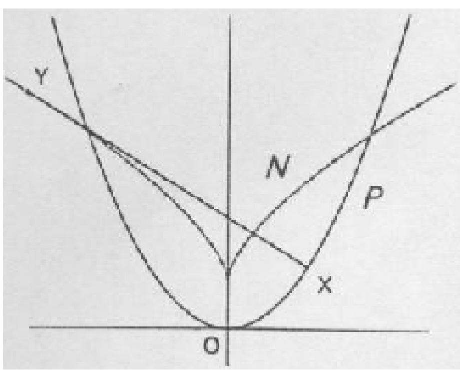
$$\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_{\mathbf{s}}(s)} N_{\mathbf{s}}(s).$$

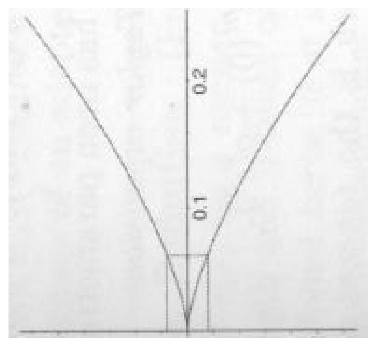
Prove que a circunferência de centro $\epsilon(s)$ e raio $|1/\kappa_{\mathbf{s}}(s)|$ é tangente a γ em $\gamma(s)$ e tem a mesma curvatura que γ nesse ponto. Esta circunferência chama-se *circunferência osculadora* de γ no ponto $\gamma(s)$. (Esboce a figura.)

4.11 Com a notação do exercício anterior, podemos olhar $\epsilon(s)$ como a parametrização de uma nova curva, chamada *evoluta* de γ (se γ não for parametrizada por comprimento de arco, a sua evoluta é definida como a evoluta de uma sua reparametrização por comprimento de arco).

(a) Suponhamos que $\kappa'_{\mathbf{s}}(s) > 0$ para cada s. Mostre que o comprimento de arco de ϵ é igual a $u_0 - \frac{1}{\kappa_{\mathbf{s}}(s)}$, onde u_0 é uma constante, e determine a curvatura com sinal de ϵ.

(b) Mostre que a evoluta da parábola $2y = x^2$ é a *curva de Neil*, de equação $27y^2 = 8(x-1)^3$ (ou, parametricamente, dada por $\gamma(t) = (t^2, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t^3)$, $t \in \mathbb{R}$).





(c) Mostre que a evoluta do ciclóide $\gamma_a(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$, onde $a > 0$ é uma constante, é a curva definida por $\epsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$ (cf. Exercício 2.5) e que, após uma mudança de parâmetro adequada, ϵ pode ser obtida de γ por uma translação no plano.

4.12 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $c > 0$. À curva $\iota_c : (0, c) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\iota_c(s) = \gamma(s) + (c-s)\gamma'(s)$ chama-se *involuta* de γ (se γ não for parametrizada por comprimento de arco, as suas involutas são definidas como as involutas de uma sua reparametrização por comprimento de arco). Mostre que se a curvatura com sinal de γ é estritamente positiva então a curvatura com sinal de ι_c é igual a $1/(c-s)$.

4.13 Seja γ uma curva plana parametrizada por comprimento de arco e sejam α e β duas involutas de γ. Mostre que α e β são curvas de Bertrand (recorde o Exercício 3.19).

4.14 Seja γ uma curva (regular) plana. Mostre que:

(a) qualquer involuta da evoluta de γ é uma curva paralela a γ;

(b) a evoluta de qualquer involuta de γ é γ.

(Compare estas afirmações com o facto da primitiva da derivada de uma função suave f ser igual a f mais uma constante, enquanto que a derivada da primitiva de f é f.)

4.15 Mostre que, aplicando uma reflexão (relativamente a uma recta) a uma curva plana, se altera o sinal da sua curvatura com sinal.

4.16 Prove que, se duas curvas planas $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ têm a mesma curvatura ($\neq 0$) para todos os valores de $t \in I$, então $\tilde{\gamma}$ pode ser obtida de γ por aplicação de um movimento rígido ou por uma reflexão (relativamente a uma recta) seguida de um movimento rígido.