5. Teorema fundamental das curvas

Nesta secção provaremos a versão geral do Teorema Fundamental das Curvas, que mostra que uma curva parametrizada por comprimento de arco fica essencialmente determinada a partir do momento em que conhecemos a sua curvatura e a sua torsão.

Recordemos que um *movimento rígido* de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da forma $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é uma rotação em torno da origem e $\mathcal{T}$ é uma translação.

Teorema 5.1. [Teorema fundamental das curvas] *Sejam $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ funções suaves com $\kappa > 0$. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é κ e cuja torsão é τ.*

E mais: se $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ é outra curva parametrizada por comprimento de arco nessas condições, existe um movimento rígido $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que, para cada $s \in I$,

$$\tilde{\gamma}(s) = \mathcal{M}(\gamma(s)).$$

Demonstração: As equações (fórmulas de Frenet-Serret)

$$T' = \kappa N \tag{5.1.1}$$
$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{5.1.2}$$
$$B' = -\tau N \tag{5.1.3}$$

podem ser consideradas como uma equação diferencial em $I \times \mathbb{R}^9$:

$$\Big(T_1(s), T_2(s), T_3(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), B_1(s), B_2(s), B_3(s)\Big)' = \tag{5.1.4}$$

$$\begin{aligned} = \quad &\Big(\kappa(s)N_1(s), \kappa(s)N_2(s), \kappa(s)N_3(s),\\ &-\kappa(s)T_1(s) + \tau(s)B_1(s), -\kappa(s)T_2(s) + \tau(s)B_2(s), -\kappa(s)T_3(s) + \tau(s)B_3(s),\\ &-\tau(s)N_1(s), -\tau(s)N_2(s), -\tau(s)N_2(s)\Big). \end{aligned}$$

Então, se fixarmos $s_0 \in I$ e considerarmos a base canónica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, a teoria das equações diferenciais ordinárias garante-nos que existem funções suaves (únicas) $T, N, B : I \to \mathbb{R}^3$ tais que $T(s_0) = e_1, N(s_0) = e_2, B(s_0) = e_3$ e cujas componentes verificam (5.1.4). Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix},$$

que exprime os vectores T', N', B' em termos de T, N, B, é anti-simétrica, o terno

$$T(s), N(s), B(s)$$

forma uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ para cada $s \in I$. Com efeito, as equações

$$\begin{aligned}
(T|T)' &= 2\kappa(T|N), \\
(T|N)' &= \kappa(N|N) - \kappa(T|T) + \tau(T|B), \\
(T|B)' &= \kappa(N|B) - \tau(T|N), \\
(N|N)' &= -2\kappa(T|N) + 2\tau(B|N), \\
(N|B)' &= -\kappa(T|B) + \tau(B|B) - \tau(N|N), \\
(B|B)' &= -2\tau(N|B).
\end{aligned}$$

definem outra equação diferencial, que terá também solução única. Como

$$\Big((T|T), (T|N), (T|B), (N|N), (N|B), (B|B)\Big)$$

é uma solução dessa equação diferencial (solução que toma o valor $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$ em $s = s_0$) e, com a mesma condição inicial, existe também a solução constante $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$, então, pela unicidade do teorema de existência de soluções deste tipo de equações diferenciais, teremos

$$(T(s)|T(s)) = 1, (T(s)|N(s)) = 0, (T(s)|B(s)) = 0,$$

$$(N(s)|N(s) = 1, (N(s)|B(s)) = 0, (B(s)|B(s)) = 1.$$

Portanto, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$, para cada $s \in I$.

Finalmente definamos

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} T(u)\, du.$$

Então $\gamma'(s) = T(s)$ pelo que γ está parametrizada por comprimento de arco. Além disso, $T' = \kappa N$ pela equação (5.1.1), pelo que, como N é unitário, κ é a curvatura de γ e N a sua normal principal. Como $B(s)$ é um vector perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$, $B(s) = \lambda(s)T(s) \wedge N(s)$, onde λ é uma função suave satisfazendo $\lambda(s) = \pm 1$ para qualquer s. Como $e_3 = e_1 \wedge e_2$, temos $\lambda(s_0) = 1$, logo $\lambda(s) = 1$ para qualquer s. Portanto $B(s)$ é a binormal de γ em s e, pela equação (5.1.3), τ é a torsão de γ.

Para provar a segunda parte, seja $\{T(s), N(s), B(s)\}$ o triedro de Frenet-Serret de γ em $\gamma(s)$ e seja $\{\tilde{T}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s)\}$ o triedro de Frenet-Serret de $\tilde{\gamma}$ no ponto $\tilde{\gamma}(s)$. Fixemos $s_0 \in I$. Como $\{T(s_0), N(s_0), B(s_0)\}$ e $\{\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0)\}$ são bases ortonormadas de $\mathbb{R}^3$ com orientação positiva, existe uma rotação $\mathcal{R}$ em torno da origem que leva $T(s_0), N(s_0)$ e $B(s_0)$ a $\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0)$ e $\tilde{B}(s_0)$, respectivamente. Além disso, consideremos a translação $\mathcal{T}$ que leva $\gamma(s_0)$ a $\tilde{\gamma}(s_0)$. Seja $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$. Provemos que $\mathcal{M}(\gamma(s)) = \tilde{\gamma}(s)$ para qualquer $s \in I$. Denotemos o triedro de Frenet-Serret da curva $\mathcal{M} \circ \gamma$ por $T_{\mathcal{M}}, N_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}}$. Porque $\mathcal{T}$ é uma translação e $\mathcal{R}$ é uma aplicação linear, $(\mathcal{M} \circ \gamma)'(s) = (R \circ \gamma')(s)$ para cada $s \in I$ (Exercício 5.1). Então

$$T_{\mathcal{M}}(s_0) = (\mathcal{M} \circ \gamma)'(s) = \mathcal{R}(\gamma'(s_0)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(s_0)) = \tilde{T}(s_0),$$

$$N_{\mathcal{M}}(s_0) = \frac{T'_{\mathcal{M}}(s_0)}{\kappa_{\mathcal{M}}(s_0)} = \frac{\mathcal{R}(\gamma''(s_0))}{\|\mathcal{R}(\gamma''(s_0))\|} = \frac{\mathcal{R}(\kappa(s_0)N(s_0))}{\|\gamma''(s_0)\|} = \tilde{N}(s_0),$$
$$B_{\mathcal{M}}(s_0) = T_{\mathcal{M}}(s_0) \wedge N_{\mathcal{M}}(s_0) = \tilde{T}(s_0) \wedge \tilde{N}(s_0) = \tilde{B}(s_0).$$

Portanto a aplicação

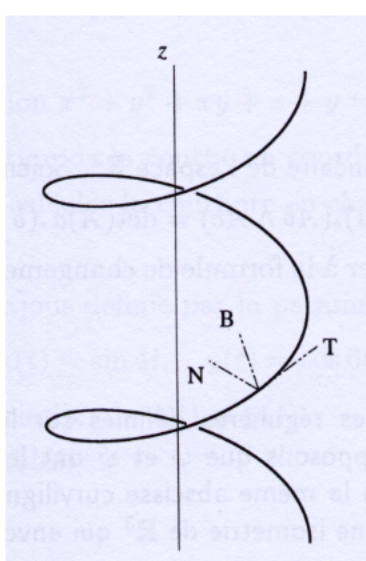
$$A : s \mapsto (\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}(s)|B_{\mathcal{M}}(s))$$

toma o valor 3 em s_0. Por outro lado, usando as fórmulas de Frenet-Serret, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A'(s) &= (\tilde{T}'(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}'(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}'(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad (\tilde{T}(s)|T'_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}(s)|N'_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}(s)|B'_{\mathcal{M}}(s)) \\ &= \kappa(s)(\tilde{N}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) - \kappa(s)(\tilde{T}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \tau(s)(\tilde{B}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) - \tau(s)(\tilde{N}(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \kappa_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{T}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) - \kappa_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{N}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \tau_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{N}(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) - \tau_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{B}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que, como $\mathcal{M} \circ \gamma$ e γ têm o mesmo traço, $\kappa_{\mathcal{M}}(s) = \kappa(s)$ e $\tau_{\mathcal{M}}(s) = \tau(s)$ para qualquer $s \in I$. Consequentemente A é constante, ou seja, $A(s) = 3$ para qualquer $s \in I$. Mas, como $\tilde{T}(s)$ e $T_{\mathcal{M}}(s)$ são vectores unitários, $(\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) \leq 1$, a igualdade ocorrendo se e só se $\tilde{T}(s) = T_{\mathcal{M}}(s)$ (analogamente para $(\tilde{N}(s)|N_{\mathcal{M}}(s))$ e $(\tilde{B}(s)|B_{\mathcal{M}}(s))$). Portanto $A(s) = 3$ implica $(\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) = 1$, ou seja, $\tilde{\gamma}' = (\mathcal{M} \circ \gamma)'$. Então $\tilde{\gamma}(s) - (\mathcal{M} \circ \gamma)(s)$ é uma constante; como $\tilde{\gamma}(s_0) = \mathcal{M}(\gamma(s_0))$, esta constante deve ser zero e $\tilde{\gamma} = \mathcal{M} \circ \gamma$. ■

Exemplo. Seja $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ em todos os seus pontos. Como vimos no Exemplo 3.3, a hélice circular $\gamma_{r,a}$ $(r > 0, a \in \mathbb{R})$ tem curvatura constante $r/(r^2+a^2)$ e torsão constante $a/(r^2+a^2)$.



Portanto, pela segunda parte do Teorema, a curva $\tilde{\gamma}$ é o resultado da aplicação de um movimento rígido à hélice circular $\gamma_{r,a}$ tal que

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{r}{r^2+a^2} \\ \\ \tau = \dfrac{a}{r^2+a^2} \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} r = \dfrac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} \\ \\ a = \dfrac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Em conclusão,

qualquer curva com curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ é, a menos de rotação e translação, a hélice circular $\gamma_{r,a}$ para os valores de r e a dados por (5.1.5).

Exercícios

5.1 Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$. Prove que $T_{\tilde{\gamma}}(s) = \mathcal{R}(T_\gamma(s))$ para qualquer $s \in I$, sendo $\tilde{\gamma}$ a curva $\mathcal{M} \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

5.2 Descreva todas as curvas em $\mathbb{R}^3$ que têm curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ.

5.3 (a) Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva *esférica* (isto é, cuja imagem está contida numa esfera, de raio r e centro c), parametrizada por comprimento de arco. Prove que:

(i) A curvatura κ de γ nunca se anula;

(ii) Se a torsão τ de γ nunca se anula então, para cada $s \in I$,

$$\gamma(s) - c = -\rho(s)N(s) - \rho'(s)\sigma(s)B(s)$$

e

$$r^2 = \rho(s)^2 + (\rho'(s)\sigma(s))^2,$$

onde $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$.

(b) Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que, para qualquer $s \in I$, $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$, $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$. Mostre que, se a função $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ é constante, γ é esférica. Qual é o raio dessa esfera?

(c) Conclua que, sendo γ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa \not\equiv 0$ e $\tau \not\equiv 0$, então γ é esférica se e só se $\tau/\kappa \equiv (\kappa'/\tau\kappa^2)'$ (ou $\tau\rho \equiv -(\rho'/\tau)'$).

5.4 Seja (a_{ij}) uma matriz 3×3 anti-simétrica (isto é, $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer i, j). Sejam v_1, v_2 e v_3 funções suaves de um parâmetro s, satisfazendo as equações diferenciais

$$v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e suponhamos que para algum s_0 os vectores $v_1(s_0), v_2(s_0)$ e $v_3(s_0)$ são ortonormados. Mostre que os vectores $v_1(s), v_2(s)$ e $v_3(s)$ são ortonormados para qualquer s.

[Sugestão: Encontre um sistema de equações diferenciais de primeira ordem satisfeito pelos produtos escalares $(v_i|v_j)$, e use o facto de tal sistema ter uma única solução com condições iniciais dadas.]