II

Superfícies em $\mathbb{R}^3$

1. PRELIMINARES

O espaço métrico $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da aplicação ("distância euclidiana")

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & ||x-y|| \end{array}$$

é um *espaço métrico* pois d satisfaz os axiomas de definição de *métrica*:

(1) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) \geq 0$;

(2) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = 0$ se e só se $x = y$;

(3) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = d(y,x)$;

(4) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Chama-se *bola aberta* de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ ao conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Um subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *aberto* se, para cada $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. É claro que qualquer bola aberta é um aberto.

Suponhamos agora que S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Então $d_1 = d_{|S\times S}$ é uma métrica em S e (S, d_1) é também um espaço métrico. Diz-se neste caso que (S, d_1) é um *subespaço métrico* de $(\mathbb{R}^n, d)$. Designando por $B^1_\varepsilon(x)$ a bola aberta em S de centro $x \in S$ e raio ε em S, temos $B^1_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \cap S$. Neste caso, $U \subseteq S$ é *aberto de* S se, para cada $x \in U$, existir $\varepsilon > 0$ tal que $B^1_\varepsilon(x) \subseteq U$. Pode provar-se que, equivalentemente, $U \subseteq S$ é aberto em S se e só se $U = V \cap S$ para algum aberto V de $\mathbb{R}^n$.

Precisaremos também da noção de espaço métrico conexo: um espaço métrico (X, d) diz-se *conexo* se não existirem abertos U e V, disjuntos e não vazios tais que $X = U \cup V$. Por exemplo, $\mathbb{R}^n$, qualquer bola aberta em $\mathbb{R}^n$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ são conexos; em $\mathbb{R}$, os intervalos são os subespaços métricos que são conexos.

Continuidade em $\mathbb{R}^n$

Uma função $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se *contínua* em $x \in S$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ (y \in S \text{ e } d(x,y) < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ f(B^1_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

ou ainda, equivalentemente, se para todo o aberto U de $\mathbb{R}^m$ contendo $f(x)$ existe um aberto V em S tal que $f(V) \subseteq U$.

A aplicação f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do domínio. Portanto f é contínua se e só se a imagem inversa de qualquer aberto U de $\mathbb{R}^m$ for um aberto de S.

Propriedades:

(1) Sejam $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : S_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicações contínuas tais que $f(S_1) \subseteq S_2$. Então $g \circ f : S_1 \to \mathbb{R}^k$ é contínua. Mais geralmente, se f e g são aplicações contínuas quaisquer então $g \circ f : f^{-1}(S_2) \to \mathbb{R}^k$ é contínua.

(2) Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $S_1 \subseteq S$ então $f_{|S_1} : S_1 \to \mathbb{R}^m$ é também contínua.

(3) Se $f : S_1 \to S_2$ é contínua e S_1 é conexo então $f(S_1)$ é conexo.

(4) Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua com S conexo. Se $a, b \in f(S)$ com $a \leq b$ e $y \in \mathbb{R}$ é tal que $a \leq y \leq b$ então $y \in f(S)$.

Uma aplicação contínua $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ diz-se um *homeomorfismo* se for bijectiva e a inversa f^{-1} for também contínua.

Facilmente se prova que uma bijecção $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo se e só se for contínua e as imagens de abertos de S_1 forem abertos em S_2.

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$

Daqui em diante U designará sempre um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação real de variável vectorial. A derivada parcial de f relativamente a x_1 no ponto $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U$, que denotaremos por

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

é a derivada, caso exista, da função real de variável real

$$x \mapsto f(x, y_2, \ldots, y_n),$$

calculada em $x = y_1$. De forma análoga podemos definir as outras derivadas parciais. Quando f possui todas as derivadas parciais em todos os pontos de uma vizinhança de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ podemos considerar as derivadas parciais de segunda ordem em $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \ldots$$

Diz-se que f é *suave* se tiver derivadas parciais contínuas de qualquer ordem, em todos os pontos de U. Quando f é suave as derivadas parciais de f são independentes da ordem pela qual são calculadas, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ etc.}$$

Ao vector

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

chama-se *gradiente* de f.

Mais geralmente, diz-se que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *suave* se todas as derivadas parciais das componentes f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de f existirem em todos os pontos de U e forem contínuas.

Propriedades:

(1) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é suave e $V \subseteq U$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ então $f_{|V}$ é também suave.

(2) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são suaves então $f + g$ é suave; se $m = 1$, $f \cdot g$ é suave; se $m = 1$ e g não for a aplicação nula então $\frac{f}{g}$ é suave.

(3) Se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, sendo cada U_i aberto em $\mathbb{R}^n$, e $f_{|U_i}$ é suave então $f : U \to \mathbb{R}^m$ é suave.

A matriz

$$J_f(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(y) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(y) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(y) \end{bmatrix}$$

chama-se a *matriz jacobiana* de f em y.

Proposição 1.1. *Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicações suaves tais que $f(U) \subseteq V$. Então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ é suave e, para cada $x \in U$,*

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) J_f(x).$$