

2. O que é uma superfície?

Nesta secção, formalizamos a noção de superfície em \mathbb{R}^3 . Discutimos em seguida alguns exemplos. Constataremos uma diferença óbvia entre a teoria das curvas e a teoria das superfícies: toda a curva é descrita por uma parametrização e existe sempre uma parametrização natural (sob o ponto de vista geométrico) – a parametrização por comprimento de arco. Para as superfícies não existem tais parametrizações e a maior parte das vezes nem sequer é possível encontrar uma parametrização que descreva a totalidade da superfície. Por exemplo, no caso da esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, qualquer que seja a maneira como realizamos a escolha de um par de parâmetros, existirá sempre um ponto, pelo menos, que não poderá ser descrito por eles. As latitude e longitude usuais, por exemplo, falham nos pólos — $(90^\circ N, 30^\circ E)$ e $(90^\circ N, 60^\circ O)$ são o mesmo ponto — e também, de certo modo, no meridiano 180° — este ou oeste?

No curso de Análise já encontraram alguns exemplos de superfícies:

- gráficos de funções de duas variáveis,
- superfícies de revolução,
- superfícies quádricas.

Aqui formularemos o conceito de superfície e estudaremos várias propriedades geométricas das superfícies.

O que é então uma superfície? É um subconjunto de \mathbb{R}^3 que “se assemelha” a uma parte de \mathbb{R}^2 “numa vizinhança” de qualquer ponto, tal como a superfície da Terra, embora esférica, parece plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até à linha do horizonte.

Os conceitos topológicos recordados na secção anterior permitem-nos precisar as expressões “se assemelha” e “numa vizinhança”:

Definição 2.1. Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de \mathbb{R}^3 é uma *superfície* se, para cada $p \in S$, existirem um aberto U de \mathbb{R}^2 , um aberto V de \mathbb{R}^3 contendo p e um homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow W = S \cap V$.

Portanto, uma superfície S aparece equipada com uma colecção de homeomorfismos $\sigma : U \rightarrow W$ a que se chama *atlas* da superfície. Cada σ chama-se *parametrização*, *mapa* ou *carta* de S . Cada ponto de S pertence à imagem de pelo menos uma destas parametrizações de S .

A superfície diz-se *suave* se

$$\text{cada parametrização } \sigma \text{ é suave} \tag{2.1.1}$$

e diz-se *regular* se, para cada $\sigma : U \rightarrow W$ e para cada $q \in U$,

$$\text{a matriz } J_\sigma(q) \text{ tem característica } 2. \tag{2.1.2}$$

Analogamente ao que fizemos no Capítulo I, neste capítulo restringir-nos-emos às superfícies suaves (no entanto, nada seria substancialmente alterado se se impusessem condições de diferenciabilidade mais fracas) regulares.

A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra “superfície” estaremos a referir-nos a superfícies suaves regulares.

Como

$$J_\sigma(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a condição (2.1.2) equivale a dizer que, para cada $q \in U$, os vectores

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) := \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}(q), \frac{\partial\sigma_3}{\partial x}(q) \right)$$

e

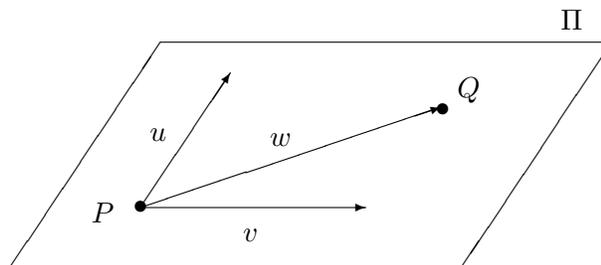
$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}(q) := \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}(q), \frac{\partial\sigma_2}{\partial y}(q), \frac{\partial\sigma_3}{\partial y}(q) \right)$$

são linearmente independentes, ou ainda que, para cada $q \in U$,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q) \neq (0, 0, 0).$$

(Note como esta última condição aparenta a condição de regularidade de uma curva.)

Exemplo. Qualquer plano Π em \mathbb{R}^3 é uma superfície com uma *parametrização global* (isto é, um atlas formado por uma só parametrização). De facto, seja P um ponto do plano e sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores do plano, perpendiculares um ao outro. Então, para cada ponto Q do plano, o respectivo vector de posição w



é uma combinação linear de u e v , digamos $\alpha u + \beta v$ para alguns escalares α e β . Portanto $Q - P = w = \alpha u + \beta v$, ou seja, $Q = P + \alpha u + \beta v$. A parametrização desejada é então a função

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi \\ (\alpha, \beta) &\mapsto P + \alpha u + \beta v. \end{aligned}$$

É óbvio que se trata de um homeomorfismo suave, sendo a inversa σ^{-1} dada por

$$\sigma^{-1}(Q) = \left((Q - P|u), (Q - P|v) \right).$$

A matriz jacobiana é a matriz

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

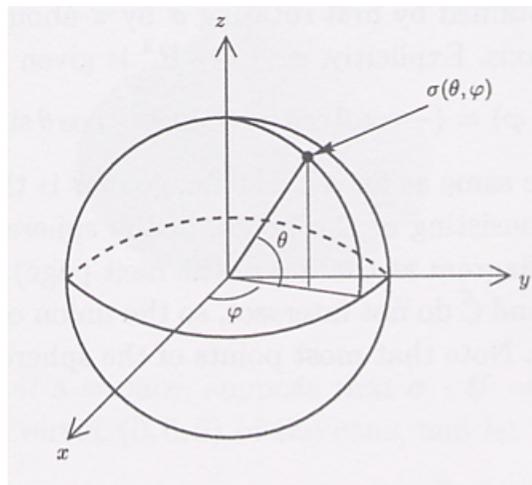
que tem característica 2 uma vez que os vectores u e v são linearmente independentes.

Exemplo. A *esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície. Talvez a parametrização mais óbvia seja a dada pela latitude θ e longitude φ :

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$



Não podemos considerar σ definida em todo o \mathbb{R}^2 , caso contrário não seria injectiva. Para cobrir toda a esfera é suficiente considerarmos

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

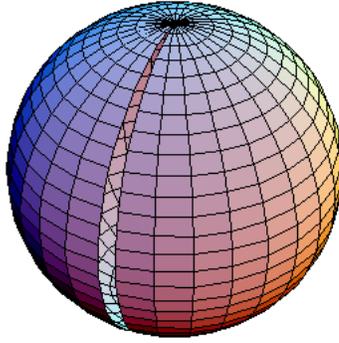
No entanto o conjunto de pares (θ, φ) nestas condições não forma um aberto de \mathbb{R}^2 , e portanto não pode ser usado como domínio de um mapa. O maior aberto de \mathbb{R}^2 consistente com aquelas desigualdades é

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}.$$

Agora a imagem de $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ não é toda a esfera, mas sim

$$S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, y = 0\},$$

ou seja, o complementar da semi-circunferência máxima \mathcal{C} formada pelos pontos $(x, 0, z)$ com $x \geq 0$.



Portanto $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cobre somente uma parte da esfera. A aplicação σ é um homeomorfismo suave de U na intersecção da esfera com o aberto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0 \text{ ou } y \neq 0\}.$$

Quanto à regularidade de σ , como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta).$$

Portanto,

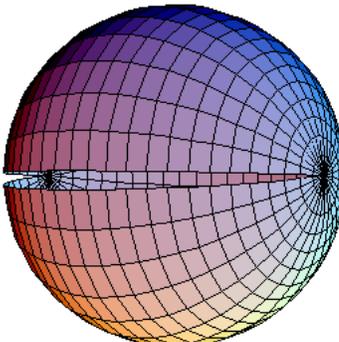
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| \neq 0,$$

pois $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, o que significa que $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \neq (0, 0, 0)$.

Para concluirmos a demonstração de que a esfera é uma superfície, necessitamos de apresentar, pelo menos, mais uma parametrização da esfera que cubra a parte da esfera omitida por σ . Por exemplo, consideremos a parametrização $\tilde{\sigma}$ obtida de σ por rotação de ângulo π em torno do eixo OZ seguida de uma rotação de ângulo $\pi/2$ em torno do eixo OX . Explicitamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : U &\rightarrow S \cap \tilde{V} \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

sendo U o mesmo que em σ e $\tilde{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ ou } z \neq 0\}$. A imagem de $\tilde{\sigma}$ é o complementar da semi-circunferência \tilde{C} máxima formada pelos pontos da esfera da forma $(x, y, 0)$ com $x \leq 0$.



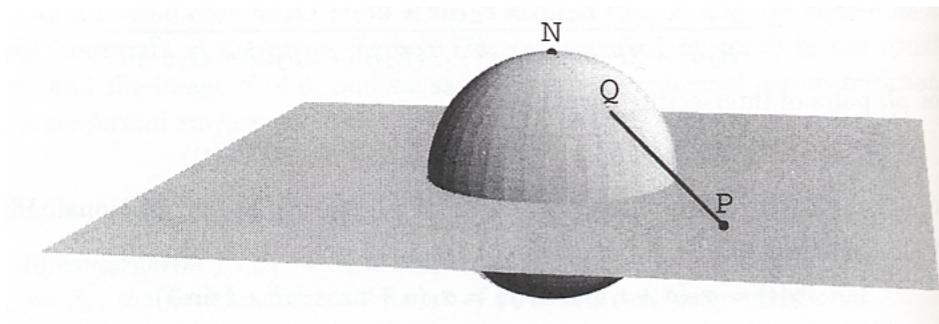
A prova de que $\tilde{\sigma}$ é regular é similar à de σ . É evidente que \mathcal{C} e $\tilde{\mathcal{C}}$ não se intersectam, pelo que a união das imagens de σ e $\tilde{\sigma}$ é a esfera toda. Note que a maioria dos pontos da esfera está na imagem de ambos os mapas.

Um outro atlas da esfera de raio $r > 0$ pode ser estabelecido do seguinte modo. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, consideremos o respectivo ponto $P = (x, y, 0)$ no plano XOY e a recta definida pelo ponto P e pelo pólo norte $N = (0, 0, r)$. Esta recta intersecta a esfera num ponto Q .

Exercício: verifique que

$$Q = \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right).$$

Qualquer ponto Q da esfera, com excepção de N , surge como tal ponto de intersecção.



A função

$$\begin{aligned} \sigma_N : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right) \end{aligned}$$

é uma parametrização da esfera toda menos o pólo norte. Para cobrir este pólo basta considerarmos a parametrização

$$\begin{aligned} \sigma_S : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{S\} \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, -\frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right), \end{aligned}$$

definida, de modo análogo, relativamente ao pólo sul $S = (0, 0, -r)$.

As inversas σ_N^{-1} e σ_S^{-1} chamam-se *projectões estereográficas* (a partir de N e de S , respectivamente).

Exercício: Verifique que

$$\sigma_N^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{rx}{r-z}, \frac{ry}{r-z} \right).$$

Um outro exemplo de atlas da esfera é constituído pelas seis parametrizações

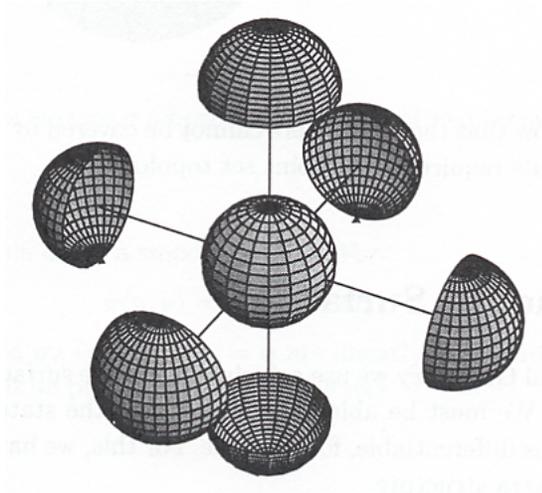
$$\phi_+^x, \phi_-^x, \phi_+^y, \phi_-^y, \phi_+^z, \phi_-^z : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definidas no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < r^2\}$, sendo

$$\phi_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, u, v), \quad \phi_{\pm}^y(u, v) = (u, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, v),$$

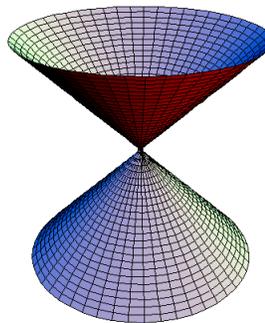
e

$$\phi_{\pm}^z(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}).$$

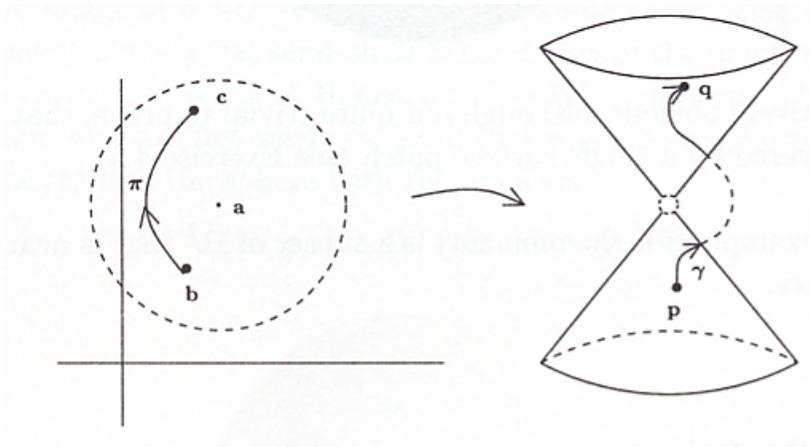


Observação. A esfera *não* pode ser coberta por uma parametrização global (a demonstração desta proposição baseia-se no facto de que, sendo S^2 um compacto de \mathbb{R}^3 e U não sendo um compacto de \mathbb{R}^2 , não pode existir nenhum homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Exemplo. Consideremos agora o cone duplo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.



Neste caso não temos uma superfície. Para concluir isso, suponhamos que $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ é uma parametrização de S contendo o vértice $v = (0, 0, 0)$, e seja $a \in U$ tal que $\sigma(a) = v$. Podemos supor que U é uma bola aberta de centro em a , pois qualquer aberto U contendo a terá que conter uma bola dessas. O aberto V tem que conter necessariamente um ponto p na metade inferior S_- do cone (onde $z < 0$) e um ponto q na metade superior S_+ (onde $z > 0$). Sejam b e c os correspondentes pontos em U e consideremos uma curva π em U passando por b e c e não passando por a . Esta curva é aplicada por σ na curva $\sigma \circ \pi$ em S , passando por p e q e não passando pelo vértice v . Isto é impossível!



Removendo o vértice, já obtemos uma superfície $S_- \cup S_+$ com um atlas formado pelos dois mapas $\sigma_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dadas pela inversa da projecção no plano horizontal XOY :

$$\sigma_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Proposição 2.2. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então o gráfico, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$, de f é uma superfície.*

Demonstração: Basta considerarmos

$$\begin{aligned} \sigma : U &\rightarrow G_f \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

Trata-se, de facto, de uma parametrização global de G_f :

- é claramente bijectiva e suave;
- $\sigma^{-1} : G_f \rightarrow U$ é contínua pois é a restrição a G_f da projecção $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

- $J_{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$ tem característica 2.

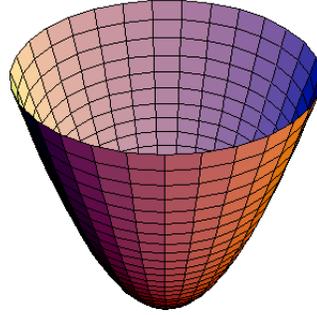
■

Analogamente, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(y, z)\}$ também são superfícies.

Exemplos. (1) O *parabolóide elíptico*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z\}$$

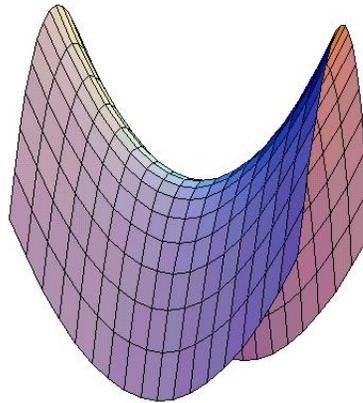
($a > 0, b > 0$) é uma superfície pois $S = G_f$ para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.



(2) Analogamente, o *parabolóide hiperbólico*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z\}$$

também é uma superfície.



Como vimos no caso da esfera, as superfícies são frequentemente dadas como *superfícies de nível* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$, definidas através de equações da forma $f(x, y, z) = a$ onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Nem sempre tais equações definem uma superfície: há que impor a f um certo grau de não degenerescência.

Um número real a diz-se um *valor regular* de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $p \in f^{-1}(a)$, o gradiente $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$.

No exemplo da esfera construímos um atlas por métodos *ad hoc*. O resultado seguinte dá-nos as condições sob as quais é possível construir um atlas para uma superfície de nível qualquer:

Teorema 2.3. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.*

Demonstração: Seja $p \in S = f^{-1}(a) \subseteq U$. Por hipótese,

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Suponhamos então que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (a prova é similar nos outros dois casos). Provaremos o teorema, apresentando um mapa $\sigma : \tilde{U} \rightarrow W \subseteq S$ de uma região aberta W de S contendo o ponto p .

Começemos por considerar a função

$$F : \quad U \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z)).$$

A matriz jacobiana de F em p ,

$$J_F(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix},$$

é invertível, uma vez que $|J_F(p)| = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa (da Análise), existem abertos V e \tilde{V} de \mathbb{R}^3 , contendo p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F : V \rightarrow \tilde{V}$ é bijetiva e $F^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V$ é suave. Suponhamos $F^{-1} = (f_1, f_2, f_3)$. É claro que $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ e $f_3 : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Composto f_3 com a função $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\lambda(x, y) = (x, y, a)$, obtemos a função suave

$$h = f_3 \circ \lambda : \quad \lambda^{-1}(\tilde{V}) \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad \mapsto \quad f_3(x, y, a).$$

Pela Proposição 2.2, G_h é uma superfície, que tem como parametrização global

$$\sigma : \quad \lambda^{-1}(\tilde{V}) \quad \rightarrow \quad G_h \\ (x, y) \quad \mapsto \quad (x, y, h(x, y)) = (x, y, f_3(x, y, a)).$$

Temos aqui o que procurávamos:

- $\tilde{U} = \lambda^{-1}(\tilde{V})$ é um aberto de \mathbb{R}^2 ;
- $W = G_h$ é um aberto de S contendo p , pois $G_h = S \cap V$:

“ \subseteq ” Seja $(x, y, z) \in G_h$. Então $z = f_3(x, y, a)$, logo $(x, y, z) = (x, y, f_3(x, y, a)) = F^{-1}(x, y, a) \in V$. Por outro lado,

$$(x, y, a) = FF^{-1}(x, y, a) = F(x, y, f_3(x, y, a)) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

pelo que $a = f(x, y, z)$, ou seja, $(x, y, z) \in f^{-1}(a) = S$.

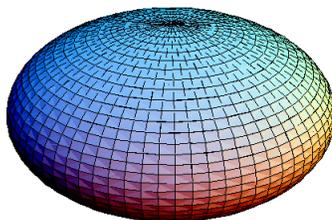
“ \supseteq ” Seja $(x, y, z) \in S \cap V$. Então

$$(x, y, z) = F^{-1}F(x, y, z) = F^{-1}(x, y, f(x, y, z)) = F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f_3(x, y, a)),$$

pelo que $z = f_3(x, y, a) = h(x, y)$. Logo $(x, y, z) \in G_h$. ■

Exemplos. (1) O *elipsóide*

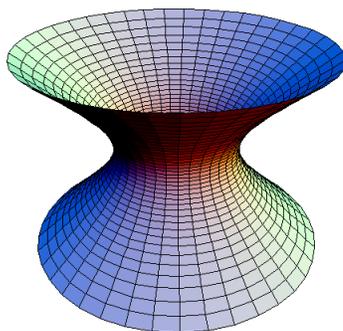
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$



é uma superfície. Com efeito, $S = f^{-1}(1)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y, z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$, e 1 é um valor regular de f , pois $\nabla f = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ só se anula em $(0, 0, 0) \notin S$.

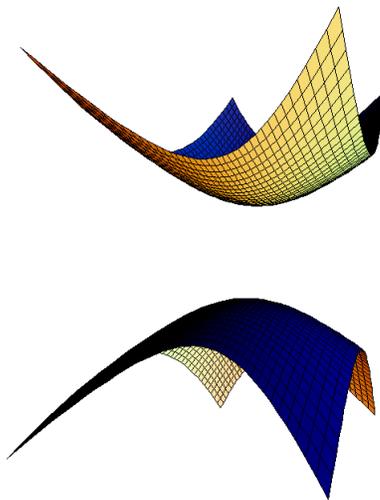
Analogamente, são também superfícies o *hiperbolóide de uma folha*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$



e o *hiperbolóide de duas folhas*

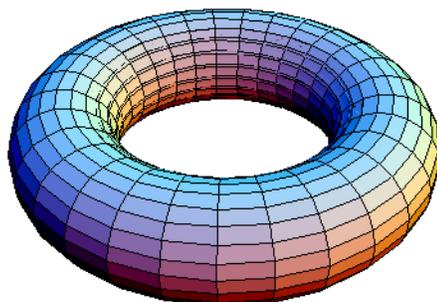
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$



(2) O *toro* obtém-se rodando uma circunferência \mathcal{C} , num plano Π , em torno de uma recta \mathcal{L} , em Π , que não intersecta \mathcal{C} . Tomando para Π o plano XOZ e para \mathcal{L} o eixo OZ , e

sendo a a distância do centro de \mathcal{C} a \mathcal{L} e $r < a$ o raio de \mathcal{C} , o toro é (cf. Exercício 2.10) a superfície de nível dada pela equação

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$



Trata-se de uma superfície, uma vez que

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 \right\} = f^{-1}(r^2),$$

onde

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 \end{aligned}$$

é suave e r^2 é um valor regular de f .

(3) Para o cone duplo do Exemplo da página 65, que observámos na altura não ser uma superfície, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Então $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$ anula-se somente no vértice $(0, 0, 0)$. Por isso este critério não nos permite concluir que $S = f^{-1}(0)$ é uma superfície.

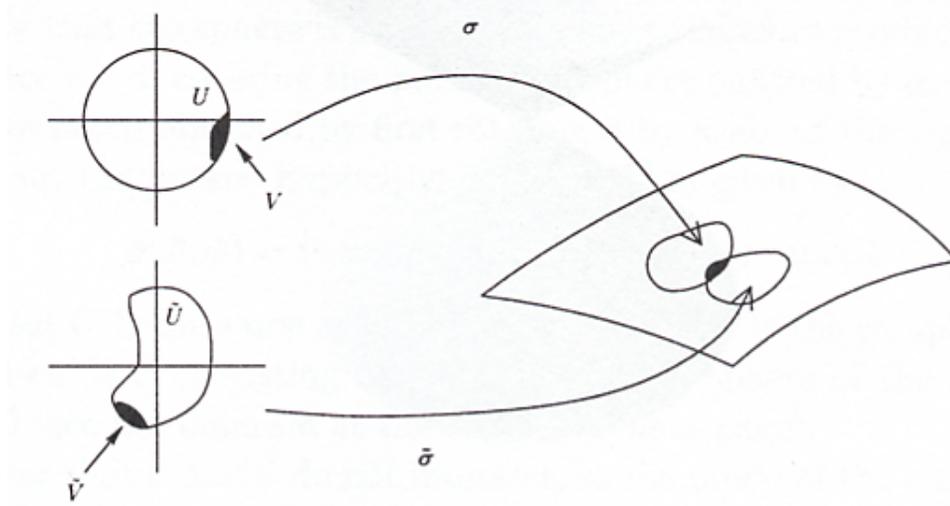
No entanto, removendo este ponto, ficamos com uma superfície, pois S é a união disjunta $S_+ \cup S_-$ (note que, pela definição de superfície, é óbvio que a união de superfícies disjuntas é ainda uma superfície) e quer o cone S_+ quer o cone S_- são superfícies por 2.3:

$$S_+ = f_+^{-1}(0) \text{ e } S_- = f_-^{-1}(0) \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} f_+ : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_- : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Como o exemplo da esfera mostra, um ponto p de uma superfície S pode estar, em geral, na imagem de mais do que um mapa. Suponhamos que $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ e $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \subseteq S$ são dois mapas de S tais que $p \in W \cap \tilde{W}$.



Como σ e $\tilde{\sigma}$ são homeomorfismos, $\sigma^{-1}(W \cap \tilde{W})$ e $\tilde{\sigma}^{-1}(W \cap \tilde{W})$ são abertos $V \subseteq U$ e $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$, respectivamente. O homeomorfismo $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma : V \rightarrow \tilde{V}$ chama-se *aplicação de transição* ou *mudança de coordenadas* de σ para $\tilde{\sigma}$. Denotando-a por Φ , temos

$$\sigma(u, v) = \tilde{\sigma}(\Phi(u, v))$$

para qualquer $(u, v) \in V$.

Sendo a superfície suave, cada Φ é suave:

Proposição 2.4. *A mudança de coordenadas $\Phi = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma : V \rightarrow \tilde{V}$ é um homeomorfismo suave entre abertos de \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Uma vez que W e \tilde{W} são abertos em S , $W \cap \tilde{W}$ é um aberto em S e também em W . Logo V é um aberto em U o que, como U é um aberto de \mathbb{R}^2 , implica sê-lo também em \mathbb{R}^2 . Analogamente, \tilde{V} é também aberto em \mathbb{R}^2 . Então Φ é um homeomorfismo por ser a composição das aplicações $\sigma : V \rightarrow W \cap \tilde{W}$ e $\tilde{\sigma}^{-1} : W \cap \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$ que são homeomorfismos visto σ e $\tilde{\sigma}$ o serem.

Para demonstrarmos que $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ é suave, provaremos que para cada $q \in V$ existe um aberto U_q tal que a restrição de $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ a U_q é suave.

Seja então $q \in V$, com $\sigma(q) = p$ e $\tilde{\sigma}(r) = p$. Uma vez que $\tilde{\sigma}$ é uma parametrização, há uma submatriz 2×2 de $J_{\tilde{\sigma}}(r)$ com determinante não nulo. Claro que podemos, sem perda de generalidade, supor que se trata da submatriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial x}(r) & \frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial y}(r) \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial x}(r) & \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial y}(r) \end{bmatrix}$$

onde $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$. Considerando $\Pi \circ \tilde{\sigma}$, com $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Pi(x, y, z) = (x, y)$, e usando o Teorema da Função Inversa, podemos concluir que existe um aberto V_r de \mathbb{R}^2 tal que a restrição de $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ a V_r é injectiva. Designemos $\tilde{\sigma}(V_r)$ por V_1 .

Definamos $F : V_r \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (\tilde{\sigma}_1(x, y), \tilde{\sigma}_2(x, y), \tilde{\sigma}_3(x, y) + z)$. Então $J_F(r, 0)$ tem determinante não nulo e F é localmente invertível em $(r, 0)$, isto é,

existem abertos em \mathbb{R}^3 , $W_{(r,0)}$ e W_p , tais que $F : W_{(r,0)} \rightarrow W_p$ é invertível e F^{-1} é suave. Como $\sigma : U \rightarrow U'$ é contínua, existe um aberto U_q de \mathbb{R}^2 contido em $\sigma^{-1}(U' \cap V_1)$ tal que $\sigma(U_q) \subseteq W_q$. Observemos finalmente que

$$(F^{-1} \circ \sigma)|_{U_q} = ((\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}, 0),$$

o que mostrará que, sendo $F^{-1} \circ \sigma$ uma aplicação suave, a aplicação $(\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}$ é suave:

Seja $(x, y) \in U_q$ e suponhamos que $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x_1, y_1, z_1)$. Como $\sigma(x, y) \in U' \cap V_1$, existe $(x', y') \in V_r$ tal que $\tilde{\sigma}(x', y') = \sigma(x, y)$. De $F(x_1, y_1, z_1) = \sigma(x, y) = \tilde{\sigma}(x', y')$ decorre que $(x_1, y_1, z_1) = (x, y, 0)$, pela injectividade de $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)|_{V_r}$. Portanto $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x', y', 0) = ((\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)(x, y), 0)$, conforme pretendíamos demonstrar. ■

Um raciocínio análogo mostra que $\Phi^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ também é suave. O resultado seguinte é uma espécie de recíproco:

Proposição 2.5. *Sejam U e \tilde{U} abertos de \mathbb{R}^3 e $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização (regular, suave) de S . Seja ainda $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ um homeomorfismo suave com inversa Φ^{-1} suave. Então $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow S$ é também uma parametrização de S .*

Demonstração: A função $\tilde{\sigma}$ é suave porque a composição de funções suaves é ainda suave.

Para provar a regularidade de $\tilde{\sigma}$, seja $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$. Como $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$, então

$$J_{\tilde{\sigma}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = J_{\sigma}(u, v) \cdot J_{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Isto significa que

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v) \\ &= \det(J_{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v). \end{aligned}$$

Como Φ é um homeomorfismo, $J_{\Phi^{-1}} = (J_{\Phi})^{-1}$; em particular, a matriz J_{Φ} é invertível, ou seja, o seu determinante é diferente de zero. Portanto

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq (0, 0, 0).$$

■

Se dois mapas σ e $\tilde{\sigma}$ num atlas de S estão relacionados como nesta proposição, dizemos que $\tilde{\sigma}$ é uma *reparametrização* de σ e que Φ é uma *mudança de coordenadas*. Note que σ é também uma reparametrização de $\tilde{\sigma}$ pois $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi^{-1}$.

No seguimento de 2.4 e 2.5, terminamos esta secção com a noção de função suave entre superfícies, de que necessitaremos mais adiante, e que permite o desenvolvimento de algum cálculo diferencial sobre uma superfície regular. Este cálculo é uma generalização natural do cálculo diferencial sobre um aberto de \mathbb{R}^2 .

A noção de função suave entre superfícies formaliza-se através da noção de suavidade para funções $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

Definição. Sejam S_1 e S_2 superfícies e W um aberto de S_1 . Uma função

$$f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$$

diz-se *suave* se, para quaisquer mapas $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ de S_1 e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$ de S_2 tais que $W_1 \cap f^{-1}(W_2) \neq \emptyset$, $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Claro que na prática esta definição é perfeitamente inútil para verificarmos se uma dada aplicação é ou não suave. Como já observámos que as mudanças de coordenadas têm “boas” propriedades (o que implica, nomeadamente, que todos os conceitos que se exprimam em termos das coordenadas locais – ou seja, de um dado mapa – não dependem do sistema de coordenadas usado, mas apenas da superfície), podemos obter o seguinte critério, mais útil na prática:

Proposição 2.6. *Uma aplicação $f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ é suave se, para cada $p \in W$, existem mapas $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$, de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p \in W_1$, $f(p) \in W_2$ e $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.*

Demonstração: Sejam $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{W}_1$ e $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{W}_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2) \neq \emptyset$. Pretendemos provar que

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2)) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

é suave. Seja $q \in \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2))$, com $\tilde{\sigma}_1(q) = p$. Então, por hipótese, existem parametrizações σ_1 e σ_2 em p e $f(p)$, respectivamente, tais que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave. Ora

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1 = (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1),$$

que é evidentemente suave pois trata-se de uma composição de aplicações suaves (uma vez que as mudanças de coordenadas são suaves), é a restrição de $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ a um aberto de \mathbb{R}^2 contendo q . Como o ponto q é qualquer, segue-se que $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ é suave. ■

Por fim, listemos mais algumas propriedades:

- Se f é suave então $f|_U$ (sendo U um aberto) também é suave.
- Se f é uma aplicação de domínio $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, e, para cada $i \in I$, $f|_{U_i}$ é suave, então f é suave.

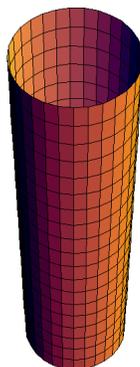
- Se f e g são suaves e podem compor-se então a composição é suave.

Uma aplicação entre superfícies, $f : S_1 \rightarrow S_2$, suave, bijectiva, cuja inversa ainda é suave, chama-se um *difeomorfismo*. Note que

se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo e σ_1 um mapa de S_1 então $f \circ \sigma_1$ é um mapa de S_2 .

Exercícios

- 2.1 Mostre que um disco aberto no plano OXY é uma superfície.
- 2.2 Mostre que o *cilindro circular* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r \neq 0$, pode ser coberto por uma parametrização e, portanto, é uma superfície.



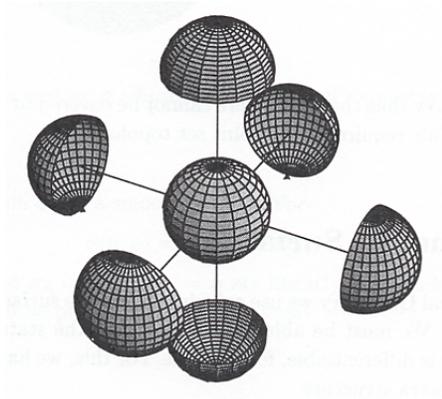
- 2.3 Defina parametrizações $\phi_+^x, \phi_-^x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a *esfera*

$$\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

resolvendo a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ relativamente a x (isto é,

$$\phi_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

definidas no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$). Defina ϕ_{\pm}^y e ϕ_{\pm}^z de modo análogo (com o mesmo U), resolvendo a equação relativamente a y e a z , respectivamente.



Mostre que estas 6 parametrizações asseguram que a esfera é uma superfície.

2.4 Considere a *projecção estereográfica* da esfera

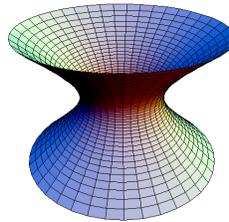
$$\pi : \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que é definida do seguinte modo: para cada $p \in \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $\pi(p)$ é o ponto de \mathbb{R}^2 tal que $(\pi(p), 0)$ é o ponto de intersecção do plano $z = 0$ com a recta que contém os pontos $(0, 0, 1)$ e p . Determine a expressão analítica de π , e mostre que π é uma bijecção e que π^{-1} é uma parametrização de \mathcal{S}^2 . Conclua que existem duas parametrizações de \mathcal{S}^2 cuja união cobre toda a esfera.

2.5 O *hiperbolóide de uma folha* é definido por $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Mostre que, para cada θ , a recta

$$(x - z) \cos \theta = (1 - y) \sin \theta, \quad (x + z) \sin \theta = (1 + y) \cos \theta$$

está contida em \mathcal{H} , e que todo o ponto do hiperbolóide pertence a uma destas rectas. Deduza que \mathcal{H} pode ser coberta por uma só parametrização, e portanto que é uma superfície. (Compare com o caso do cilindro do Exercício 2.2.)



Determine uma segunda família de rectas em \mathcal{H} , e mostre que nenhum par de rectas da mesma família se intersecta, enquanto que qualquer recta da primeira família intersecta qualquer recta da segunda família com uma excepção.

2.6 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$, sendo $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Prove que $f(U)$ é uma superfície.

2.7 Mostre que o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são constantes não nulas, é uma superfície.

2.8 Mostre que $\phi(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2)$ define uma parametrização da parte $z > 0$ do *parabolóide hiperbólico* $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

Fazendo uso da Proposição 2.2, determine outra parametrização $\tilde{\phi}$, e verifique que $\tilde{\phi}$ é uma *reparametrização* de ϕ . Determine as duas parametrizações análogas para a parte $z < 0$.

2.9 Prove que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1\}$ é uma superfície.

2.10 Um *toro* obtém-se rodando uma circunferência \mathcal{C} , num plano Π , em torno de uma recta \mathcal{L} (também em Π) que não intersecta \mathcal{C} . Considere para plano Π o plano XOZ e para \mathcal{L} o eixo OZ . Seja ainda $a > 0$ a distância do centro de \mathcal{C} a \mathcal{L} , e $r < a$ o raio de \mathcal{C} . Mostre, de dois modos distintos, que o toro é uma superfície, mostrando que:

(a) tem um atlas consistindo nas parametrizações

$$\sigma(u, v) = \left((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v \right),$$

com (u, v) pertencendo a adequados subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 ;

(b) é a superfície de nível dada por $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

- 2.11 Para que valores de c se pode garantir que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z - 2) + xy = c\}$ é uma superfície?
- 2.12 Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2$. Prove que, apesar de 0 não ser valor regular de f , $f^{-1}(0)$ é uma superfície.