

### 3. Algumas classes especiais de superfícies

Nesta secção descrevemos algumas das classes de superfícies mais simples.

#### Superfícies quádricas

As superfícies mais simples — os planos — têm equações cartesianas lineares em  $x, y, z$  (por exemplo,  $z = 2$ ,  $x + y = 0$  ou  $x + y + z = 0$ ). Deste ponto de vista, as superfícies seguintes mais simples serão as que têm equações cartesianas dadas por expressões quadráticas em  $x, y, z$ .

**Definição.** Uma *quádrica* é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido por uma equação da forma

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5yz + 2a_6xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial  $(rA | r) + (b | r) + c = 0$ , onde

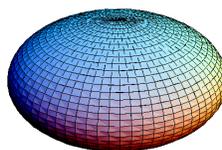
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}.$$

Uma quádrica não é necessariamente uma superfície. Por exemplo,  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  define o ponto  $(0, 0, 0)$ ,  $x^2 + y^2 = 0$  define a recta  $x = y = 0$  (ou seja, o eixo  $OZ$ ) e  $xy = 0$  define a união de dois planos que se intersectam (os planos  $x = 0$  e  $y = 0$ ).

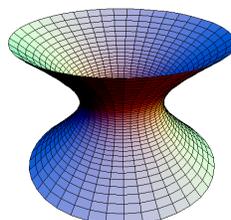
O teorema seguinte mostra que basta considerar quádricas cujas equações tomam uma forma particularmente simples.

**Teorema 3.1.** *Aplicando um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , qualquer quádrica não vazia na qual os coeficientes não são todos nulos pode ser transformada numa cuja equação cartesiana é uma das seguintes (em cada caso,  $a, b, c$  são constantes não nulas):*

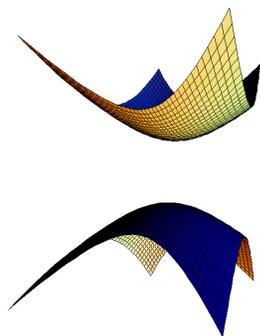
(1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (*elipsóide*)



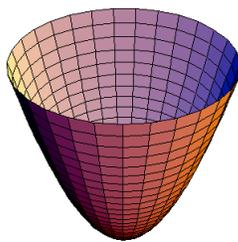
(2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (*hiperbolóide de uma folha*)



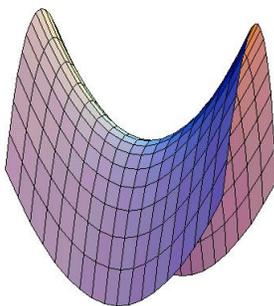
(3)  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (*hiperbolóide de duas folhas*)



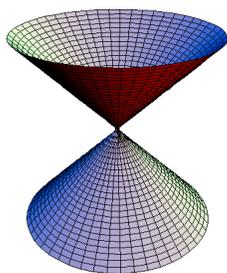
(4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$  (*parabolóide elíptico*)



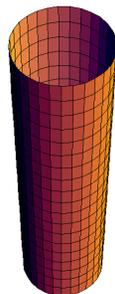
(5)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  (*parabolóide hiperbólico*)



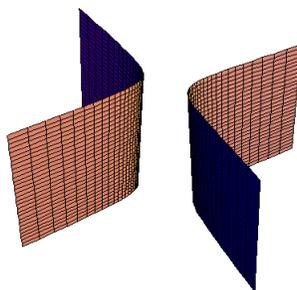
(6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  (*cone duplo*)



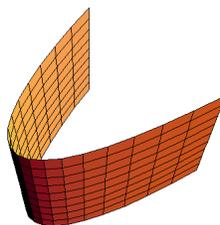
$$(7) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (cilindro elíptico)}$$



$$(8) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (cilindro hiperbólico)}$$



$$(9) \frac{x^2}{a^2} = y \text{ (cilindro parabólico)}$$



$$(10) x = 0 \text{ (plano)}$$

$$(11) x^2 = a^2 \text{ (dois planos paralelos)}$$

$$(12) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (dois planos que se intersectam)}$$

$$(13) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (recta)}$$

$$(14) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (ponto)}.$$

**Demonstração:** Podemos começar por escrever a quádrica na forma

$$[x \ y \ z]A[x \ y \ z]^T + [b_1 \ b_2 \ b_3][x \ y \ z]^T + c = 0. \quad (3.1.1)$$

Sabemos da Álgebra Linear que existe uma matriz  $P$  tal que  $P^T P = I$ ,  $|P| = 1$  e  $A' = P^T A P$  é diagonal ( $P$  é a matriz de diagonalização de  $A$ , os elementos na diagonal

de  $A'$  são os valores próprios de  $A$  e as linhas de  $P$  são os correspondentes vectores próprios). Definamos

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z]P$$

e

$$[b'_1 \ b'_2 \ b'_3] = [b_1 \ b_2 \ b_3]P.$$

Substituindo em (3.1.1), obtemos a quádrlica

$$[x' \ y' \ z']A'[x' \ y' \ z']^T + [b'_1 \ b'_2 \ b'_3][x' \ y' \ z']^T + c = 0$$

ou seja,

$$a'_1x'^2 + a'_2y'^2 + a'_3z'^2 + b'_1x' + b'_2y' + b'_3z' + c = 0.$$

Geometricamente, isto significa que aplicámos uma rotação (movimento rígido) à quádrlica inicial, pois qualquer matriz  $P$ ,  $3 \times 3$ , tal que  $P^T P = I$  e  $|P| = 1$  representa uma rotação de  $\mathbb{R}^3$ .

Em conclusão, é sempre possível levar qualquer quádrlica, por rotação, à forma

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0. \quad (3.1.2)$$

Agora, se  $a_1 \neq 0$ , fazendo  $x' = x + \frac{b_1}{2a_1}$  (o que corresponde a uma translação) obtemos

$$a_1x'^2 + a_2y'^2 + a_3z'^2 + b_2y' + b_3z' + c' = 0.$$

Isto mostra que quando  $a_1 \neq 0$  podemos assumir  $b_1 = 0$ ; claro que, analogamente, podemos fazer o mesmo a  $b_2$  (quando  $a_2 \neq 0$ ) e  $b_3$  (quando  $a_3 \neq 0$ ). Teremos assim que analisar apenas quatro casos:

Caso 1 ( $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ ): Neste caso a quádrlica reduz-se, pelas tais translações, a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + c = 0.$$

Se  $c = 0$  obtemos os casos (6) e (14). Se  $c \neq 0$  obtemos os casos (1), (2) e (3), consoante os sinais de  $a_1, a_2, a_3$  e  $c$ .

Caso 2 ( $a_1, a_2 \neq 0, a_3 = 0$ ): Neste caso a quádrlica reduz-se a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z + c = 0.$$

Se  $b_3 = 0$  então  $a_1x^2 + a_2y^2 + c = 0$ . Neste caso, se  $c = 0$  obtemos os casos (12) e (13), e se  $c \neq 0$  obtemos, dividindo por  $-c$ , os casos (7) e (8). Se  $b_3 \neq 0$ , efectuamos a translação

$$z' = z + \frac{c}{b_3}$$

reduzindo a quádrlica a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + z = 0.$$

Isto dá os casos (4) e (5). Com efeito:  $a_1, a_2 < 0$  dá imediatamente o caso (4), e  $a_1 < 0, a_2 > 0$  ou  $a_1 > 0, a_2 < 0$  origina o caso (5); se  $a_1, a_2 > 0$ , fazendo a rotação de

ângulo  $\pi$  em torno do eixo  $OX$ , ou seja, fazendo  $x' = x, y' = -y$  e  $z' = -z$ , obtemos  $a_1x^2 + a_2y^2 = z$ , isto é, o caso (4).

Caso 3 ( $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0$ ): A quádrlica (3.1.2) reduz-se a

$$a_1x^2 + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Se  $b_2, b_3 \neq 0$ , rodando o plano  $OYZ$  de modo a que o eixo  $OY$  fique paralelo ao vector  $(b_2, b_3)$ , chegamos à situação  $b_2 \neq 0, b_3 = 0$  e depois, pela translação  $y' = y + \frac{c}{b_2}$  ao longo do eixo  $OY$ , podemos fazer  $c = 0$ . Chegamos assim a  $a_1x^2 + y = 0$ , ou seja, o caso (9). Se  $b_2, b_3 = 0$  então, se  $c = 0$  obtemos o caso (10), e se  $c \neq 0$  o caso (11).

Caso 4 ( $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ): Neste caso, (3.1.2), quando não é vazia, é a equação de um plano, que por um movimento rígido óbvio se reduz ao caso (10) novamente. ■

**Exemplo.** Consideremos a quádrlica  $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$ . Neste caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

já é diagonal. Efectuando a translação  $x_1 = x + 3$  e  $y_1 = y - 1$  obtemos

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 3z = 18.$$

Em seguida, pela translação  $z_1 = z - 6$  chegamos a

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1 = 0.$$

Estamos assim no caso 2 da demonstração do Teorema. Efectuando a rotação de ângulo  $\pi$ , em torno do eixo  $OX$ , ou seja, fazendo  $x_2 = x_1, y_2 = -y_1, z_2 = -z_1$ , obtemos

$$\frac{1}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}y_2^2 = z_2,$$

que define um parabolóide elíptico de eixos  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Como já sabemos, esta superfície tem uma parametrização global dada por  $x_2 = u \in \mathbb{R}, y_2 = v \in \mathbb{R}$  e  $z_2 = \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}v^2$ , isto é,

$$\tilde{\sigma} : (u, v) \mapsto (u, v, \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}v^2).$$

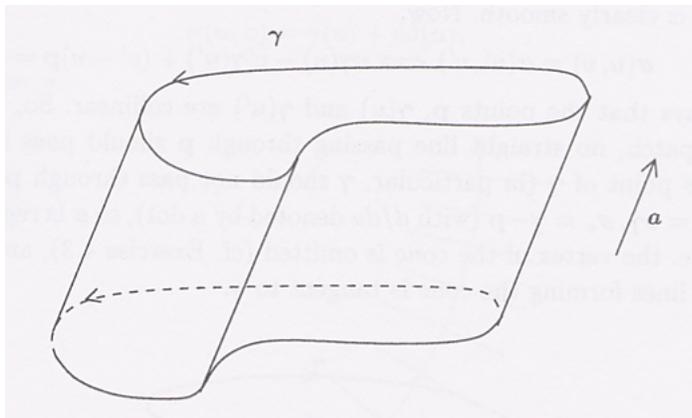
Isto corresponde, na quádrlica inicial, a  $x = x_2 - 3 = u - 3, y = 1 - y_2 = 1 - v$  e  $z = 6 - z_2 = 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2$ . Portanto a quádrlica inicial é um parabolóide elíptico com uma parametrização global dada por

$$\sigma(u, v) = \left( u - 3, 1 - v, 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2 \right).$$

## Cilindros generalizados

Um *cilindro (generalizado)* é uma superfície que se obtém por translação de uma curva  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se  $a$  é um vector unitário na direcção da translação, o ponto obtido trasladando o ponto  $\gamma(u)$  da curva pelo vector  $va$  paralelo a  $a$  é

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + va.$$



Isto define uma função  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$ , claramente suave. Como

$$\sigma(u, v) = \sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) \Leftrightarrow \gamma(u) - \gamma(\tilde{u}) = (\tilde{v} - v)a,$$

$\sigma$  é injectiva quando nenhuma recta paralela a  $a$  intersecta  $\gamma$  em mais do que um ponto. Finalmente,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \gamma'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = a,$$

pelo que  $\sigma$  é regular se e só se o vector  $\gamma'(u)$  nunca é paralelo a  $a$ .

A parametrização toma uma forma muito simples quando  $\gamma$  está num plano perpendicular a  $a$  (o que pode ser sempre atingido, substituindo  $\gamma$  pela sua projecção num tal plano). A condição de regularidade é então satisfeita desde que  $\gamma'(u)$  nunca se anule, isto é, quando  $\gamma$  é regular. Podemos também considerar que o plano da curva é o plano  $OXY$  e  $a = (0, 0, 1)$ . Então

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$$

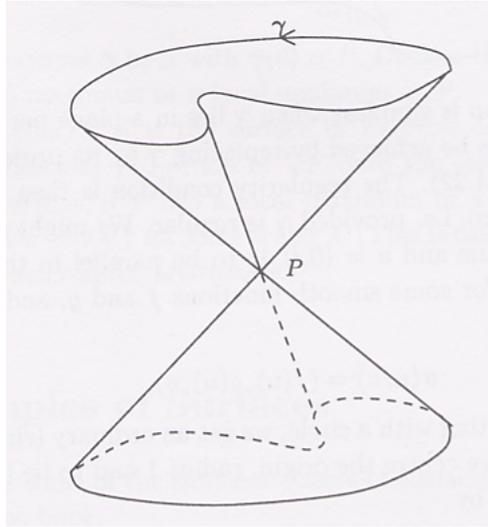
para funções suaves  $f$  e  $g$ , e a parametrização vem

$$\sigma(u, v) = (f(u), g(u), v).$$

Por exemplo, o cilindro circular usual é gerado pela circunferência  $\gamma$  de equação  $x^2 + y^2 = 1$ , que pode ser parametrizada por  $\gamma(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ , para  $0 < u < 2\pi$  e  $-\pi < u < \pi$  por exemplo. Isto dá um atlas para o cilindro formado por dois mapas, ambos dados por  $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , e definidos nos abertos  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}$  e  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\}$ .

## Cones generalizados

Um *cone (generalizado)* é uma união de rectas passando por um dado ponto  $p$  (o *vértice* do cone) e pelos pontos de uma dada curva  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



Cada ponto de cada uma dessas rectas é da forma

$$\sigma(u, v) = (1 - v)p + v\gamma(u).$$

Esta função  $\sigma$  é claramente suave. Como

$$\sigma(u, v) = \sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) \Leftrightarrow v\gamma(u) - \tilde{v}\gamma(\tilde{u}) + (\tilde{v} - v)p = 0$$

significa que os pontos  $p$ ,  $\gamma(u)$  e  $\gamma(\tilde{u})$  são colineares,  $\sigma$  é injectiva quando nenhuma recta que passa por  $p$  passa por mais do que um ponto de  $\gamma$  (em particular,  $\gamma$  não pode passar por  $p$ ). Finalmente,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = v\gamma'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \gamma(u) - p,$$

pelo que  $\sigma$  é regular desde que  $v \neq 0$  (ou seja, o vértice do cone é omitido) e nenhuma das rectas que forma o cone é tangente a  $\gamma$ .

Esta parametrização toma a forma mais simples possível quando  $\gamma$  é plana. Se este plano contiver  $p$ , o cone é parte desse plano. Senão, podemos supor que  $p$  é a origem e o plano é o plano  $z = 1$ . Então,  $\gamma(u) = (f(u), g(u), 1)$  para funções suaves  $f$  e  $g$ , e a parametrização toma a forma

$$\sigma(u, v) = v(f(u), g(u), 1).$$

## Tubos

Seja  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por comprimento de arco, para a qual existe  $r > 0$  tal que  $\kappa(s) < r^{-1}$  para qualquer  $s \in (\alpha, \beta)$ . A circunferência

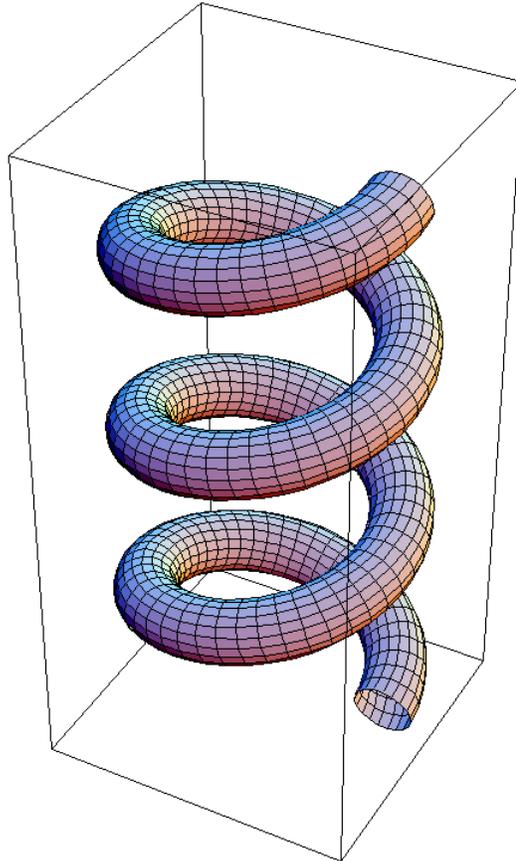
$$\theta \mapsto \cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)$$

está no plano normal à curva em  $\gamma(s)$ , plano este perpendicular à tangente à curva em  $\gamma(s)$ . Quando esta circunferência se move ao longo de  $\gamma$  define uma superfície, chamada *tubo* de raio  $r > 0$  em torno de  $\gamma$ , parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + r(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)),$$

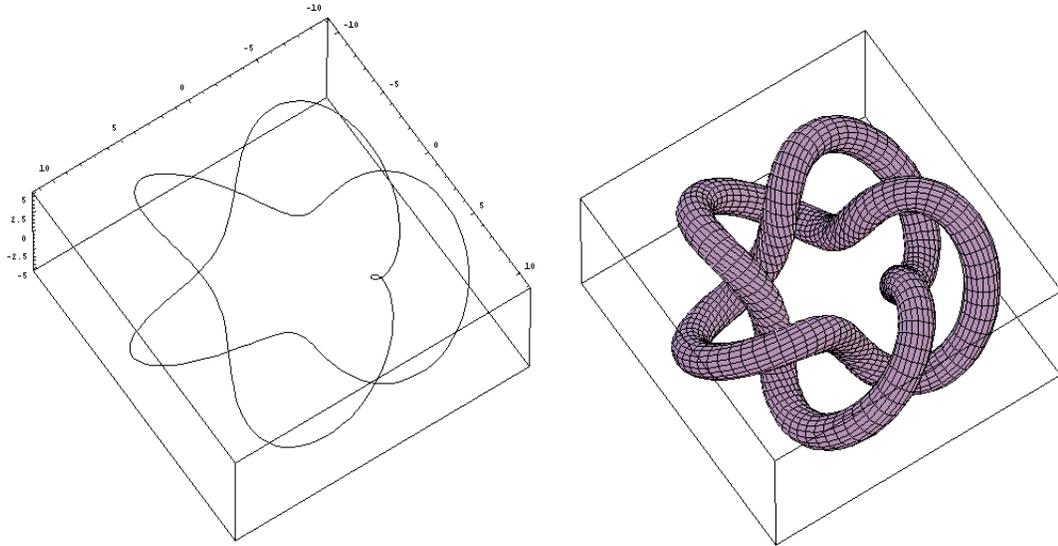
com  $s \in (\alpha, \beta)$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$  ou  $s \in (\alpha, \beta)$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .

A figura seguinte mostra o tubo de raio 0.5 da hélice vertical de raio 2 e passo 0.5:



Estas superfícies têm uma propriedade interessante: o seu volume depende somente do raio  $r$  e do comprimento de  $\gamma$ , e não da curvatura ou da torsão de  $\gamma$ . Assim, tubos do mesmo raio em torno de uma circunferência e de uma hélice com o mesmo comprimento terão o mesmo volume.

A figura seguinte mostra uma curva (um nó num toro elíptico) e o respectivo tubo de raio 1.3:



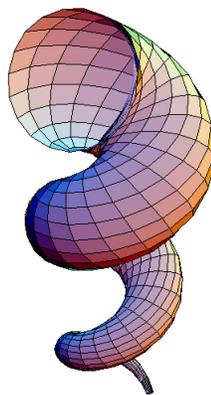
## Conchas

A construção de tubos em torno de uma curva  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$  pode ser facilmente modificada de modo a permitir que o raio do tubo vá variando ao longo da curva. Às superfícies definidas deste modo chamam-se *conchas* em torno de  $\gamma$ . Portanto uma concha pode ser parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + rs(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)),$$

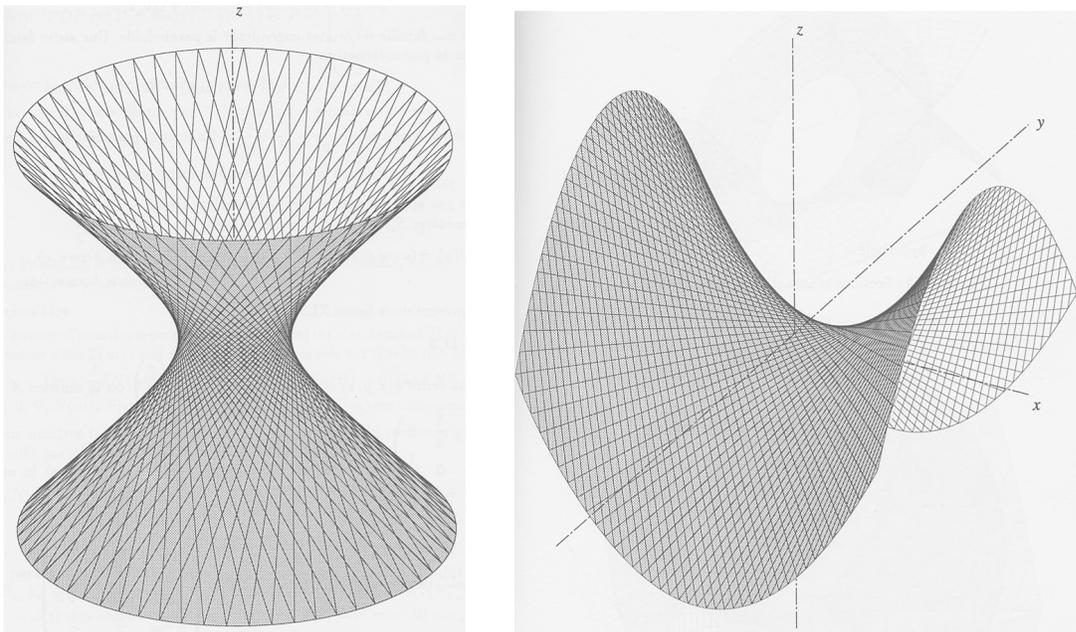
com  $s \in (\alpha, \beta)$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$  ou  $s \in (\alpha, \beta)$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .

Por exemplo, se tomarmos para  $\gamma$  a hélice vertical de raio 1 e passo 0.6 obtemos:

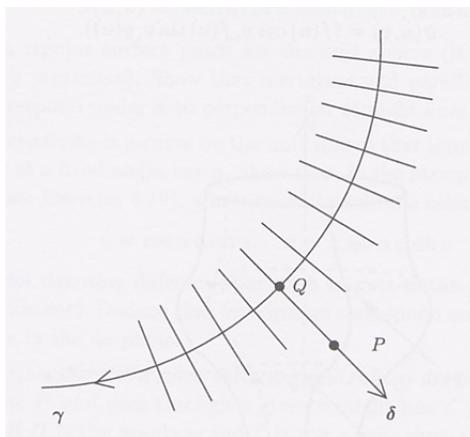


## Superfícies regradas

Uma *superfície regradada* é uma superfície gerada por uma recta movendo-se ao longo de uma curva  $\gamma$  (chamada *directriz*). Portanto, uma superfície regradada é uma união de rectas (chamadas *rectas directoras* da superfície). São exemplos de superfícies regradadas o hiperbolóide de uma folha e o parabolóide hiperbólico (na figura seguinte) e o helicóide (Exercício 3.9).



Cada ponto  $P$  de uma superfície regrada pertence a uma recta directora, recta essa que intersecta  $\gamma$  num ponto  $Q = \gamma(u)$ . Se  $\delta(u)$  denotar um vector não nulo na direcção dessa recta,



$P$  tem como vector de posição o vector

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u), \quad (3.1.3)$$

para algum escalar  $v$ .

Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \gamma'(u) + v\delta'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \delta(u),$$

$\sigma$  é regular se e só se os vectores  $\gamma'(u) + v\delta'(u)$  e  $\delta(u)$  são linearmente independentes. Isto será verdade, por exemplo, se  $\gamma'(u)$  e  $\delta(u)$  forem linearmente independentes e  $v$  for suficientemente pequeno. Portanto, para que  $\sigma$  seja uma parametrização e tenhamos assim uma superfície, a curva  $\gamma$  nunca pode ser tangente às rectas directoras.

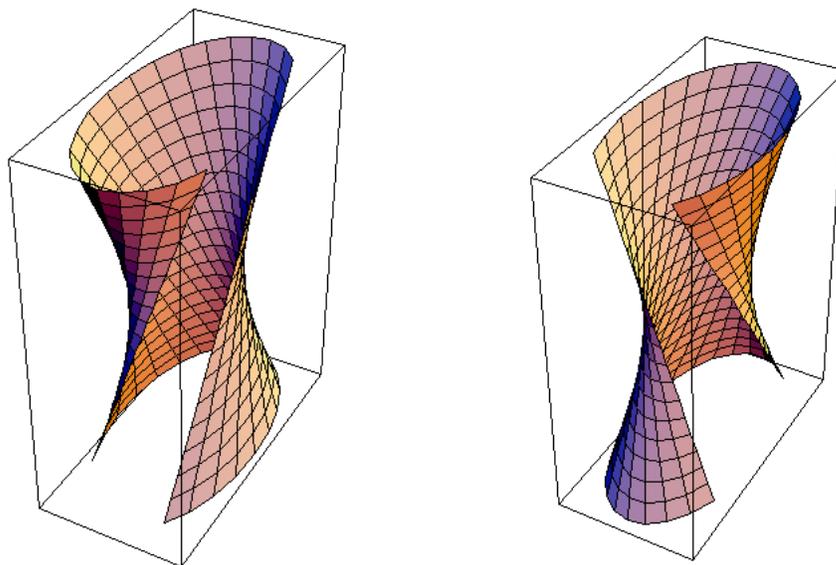
A um mapa do tipo (3.1.3) chama-se *mapa regrado*. Por vezes uma superfície regrada possui dois mapas regradados distintos. Neste caso a superfície diz-se *duplamente regrada*. É o caso do parabolóide hiperbólico ou do hiperbolóide de uma folha (na figura acima). Neste último caso, os dois mapas regradados são

$$\sigma_1(u, v) = (a(\cos u + v \sin u), b(\sin u - v \cos u), -cv)$$

e

$$\sigma_2(u, v) = (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv)$$

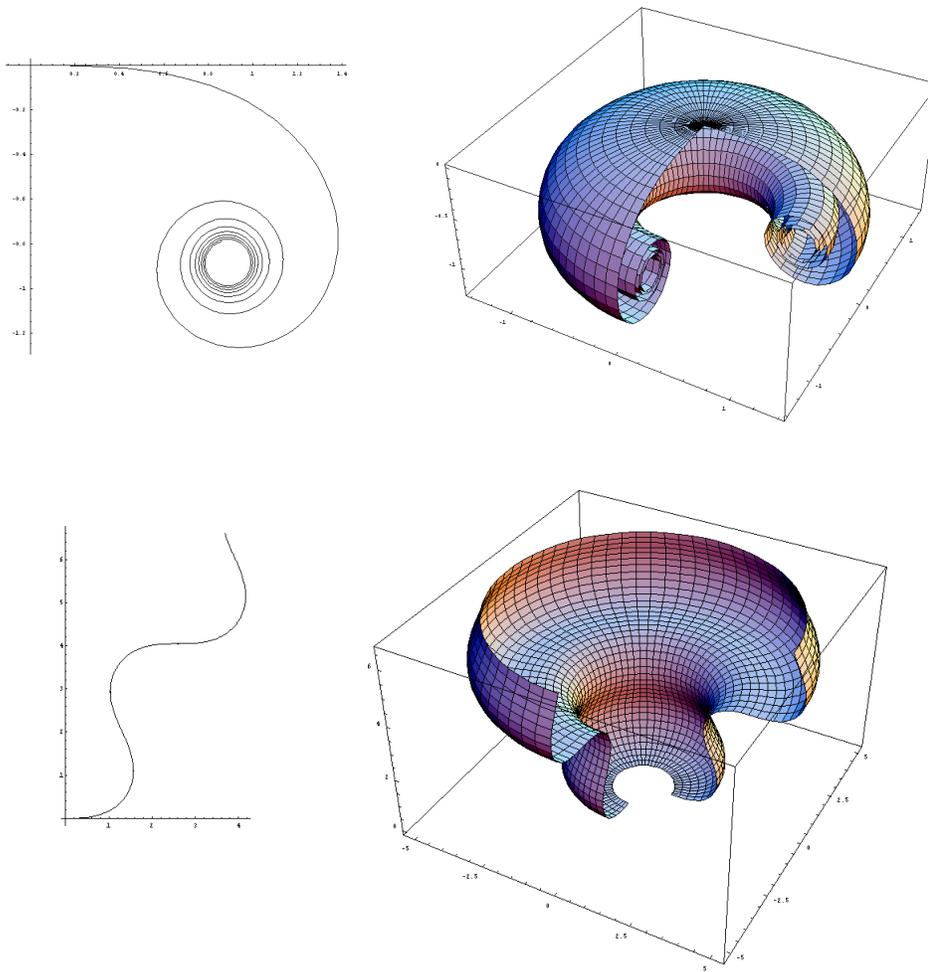
representados, na figura seguinte:



### Superfícies de revolução

As superfícies de revolução formam uma das classes mais simples de superfícies não triviais.

Uma *superfície de revolução* é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma recta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução*. Por exemplo, a esfera, o toro e o parabolóide são superfícies de revolução. Um elipsóide é uma superfície de revolução quando dois dos seus eixos são iguais. As figuras seguintes mostram duas superfícies de revolução e as respectivas curvas geratriz; no primeiro caso trata-se da espiral de Cornu e no segundo caso da curva com curvatura  $\kappa(s) = \sin s$  (cf. Exemplos I.??(2)).

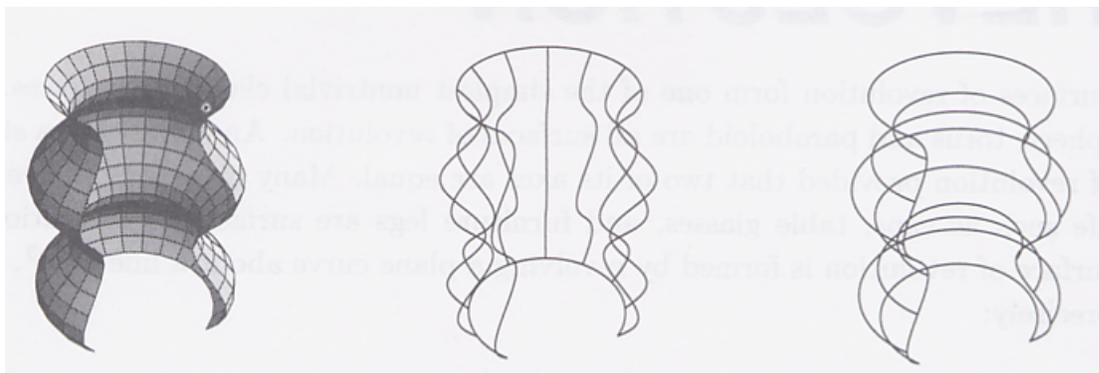


As circunferências obtidas por rotação de um ponto fixo da geratriz em torno do eixo de revolução chamam-se *paralelos* da superfície e as curvas na superfície obtidas por rotação da geratriz segundo um ângulo fixo chamam-se *meridianos*.

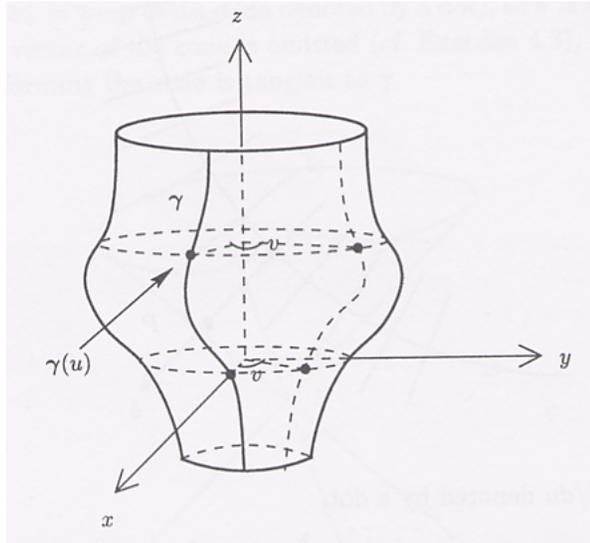
A figura seguinte mostra a superfície de revolução gerada pela curva

$$t \mapsto \left(2 + \frac{1}{2} \sin 2t, t\right),$$

com os seus meridianos e paralelos:



Fixemos para eixo de revolução o eixo  $OZ$  e para plano da geratriz o plano  $OXZ$ .



Cada ponto  $p$  da superfície é obtido por rotação, de ângulo  $v$ , de algum ponto  $q$  da geratriz. Se  $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$  é uma parametrização da curva geratriz, o ponto  $p$  tem vector de posição (Exercício 4.4)

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0),$$

então

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = f(u)^2 (f'(u)^2 + g'(u)^2).$$

Consequentemente,  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$  nunca se anula caso  $f(u)$  nunca se anule (isto é, se  $\gamma$  não intersecta o eixo  $OZ$ ) e  $f'$  e  $g'$  nunca se anularem simultaneamente (isto é, se  $\gamma$  é regular). Neste caso, podemos supor que  $f(u) > 0$ , de modo a que  $f(u)$  seja a distância de  $\sigma(u, v)$  ao eixo de revolução. Então  $\sigma$  é injectiva desde que  $\gamma$  não se auto intersecte e o ângulo de rotação  $v$  varie num intervalo de amplitude  $\leq 2\pi$ . Nestas condições, parametrizações da forma  $\sigma$  formam um atlas e a superfície de revolução é, de facto, uma superfície.

### Exercícios

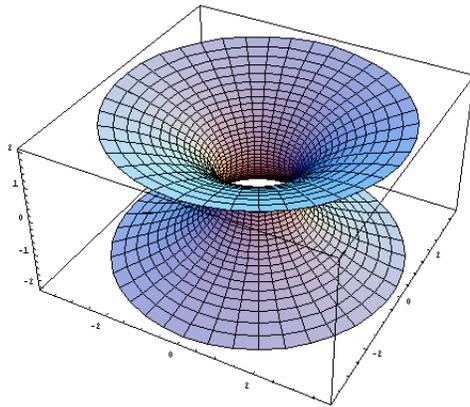
- 3.1 Determine um atlas para cada uma das superfícies quádricas (1)-(11) no Teorema 3.1 (note que, no caso (6), temos que remover a origem).
- 3.2 Mostre que a quádrica  $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$  é uma superfície, exibindo um atlas.
- 3.3 Quais superfícies quádricas são regradas?

3.4 Uma *superfície de revolução*  $\mathcal{R}$  é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma recta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução*. As circunferências obtidas por rotação de um ponto fixo da geratriz em torno do eixo de revolução chamam-se *paralelos* da superfície e as curvas na superfície obtidas por rotação da geratriz segundo um ângulo fixo chamam-se *meridianos*. Fixemos para eixo de revolução o eixo  $OZ$  e para plano da geratriz o plano  $OXZ$ . Cada ponto  $p$  de  $\mathcal{R}$  é obtido por rotação, de ângulo  $v$ , de algum ponto  $q$  da geratriz.

- Se  $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$  é uma parametrização da curva geratriz, mostre que o ponto  $p$  tem vector de posição  $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ .
- Verifique que  $\sigma$  é injectiva desde que  $\gamma$  não se auto intersecte e o ângulo de rotação  $v$  varie num intervalo de amplitude  $\leq 2\pi$ .
- Mostre que  $\sigma$  é regular se e só se  $\gamma$  é regular e não intersecta o eixo  $OZ$ .
- Conclua que, nas condições de (b) e (c),  $\sigma$  permite formar um atlas de  $\mathcal{R}$ .

3.5 Quais superfícies quádricas são de revolução?

3.6 A superfície obtida rodando a curva  $x = \cosh z$ , no plano  $OXZ$ , em torno do eixo  $OZ$ , chama-se *catenóide*. Descreva um atlas para esta superfície.



3.7 Mostre que  $\sigma(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$  define um mapa da esfera (a inversa  $\sigma^{-1}$  é chamada *projecção de Mercator*). Verifique que meridianos e paralelos na esfera correspondem, pela projecção de Mercator, a rectas ortogonais no plano.

3.8 Uma *loxodromia* é uma curva na esfera unitária que intersecta os meridianos segundo um ângulo fixo  $\alpha$ . Mostre que no mapa de Mercator (exercício anterior) uma loxodromia  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ , parametrizada por comprimento de arco, satisfaz  $u'(t) = \cos \alpha \cosh u(t)$  e  $v'(t) = \pm \sin \alpha \cosh u(t)$ . Deduza que as loxodromias correspondem, pela projecção de Mercator, a rectas no plano.