4. Tangentes e normais; orientabilidade

Uma maneira natural de estudar uma superfície S consiste em considerar curvas γ cujas imagens estão contidas em S.

Se a imagem de $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ está contida na imagem de um mapa $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ no atlas de S, existe uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \to & U \\ t & \mapsto & (u(t), v(t)) \end{array}$$

tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)). \qquad (*)$$

As funções u e v são necessariamente suaves. Reciprocamente, é óbvio que se

$$t \mapsto (u(t), v(t))$$

é suave então a equação $(*)$ define uma curva cuja imagem está em S. Em geral, se $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ é uma curva cuja imagem está em S e um ponto $\gamma(t_0)$ de γ é abrangido por um mapa $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ de S então, por continuidade, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\gamma((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)) \subseteq \sigma(U).$$

Podemos então, daqui em diante, restringir-nos a curvas da forma $(*)$. Portanto, nesta secção entenderemos por *curva em S* uma curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma((a,b)) \subseteq \sigma(U)$, para algum mapa $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ do atlas de S.

Definição. Um *vector tangente* a S num ponto $p \in S$ é um vector que é tangente a alguma curva em S que passa por p. Assim, v é tangente a S em p se existir uma curva γ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, para algum t_0 no domínio de γ.

Proposição 4.1. *O conjunto dos vectores tangentes a S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \quad e \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q).$$

Demonstração: Seja v um vector tangente a S em p e seja $\sigma : U \to W \subseteq S$ um mapa de S contendo o ponto p. Então existe uma curva $\gamma : (a,b) \to W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição

$$(a,b) \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W.$$

Denotando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\overline{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} & J_\gamma(t_0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\overline{\gamma}}(t_0) \Leftrightarrow \\ & \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \\ \gamma_3'(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\gamma}_1'(t_0) \\ \overline{\gamma}_2'(t_0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ & v = \overline{\gamma}_1'(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \overline{\gamma}_2'(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja

$$v = c_1\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) + c_2\frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)$$

e definamos

$$\begin{array}{rccl} \overline{\gamma}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & q + t(c_1, c_2). \end{array}$$

Trata-se de uma função suave. Como é contínua em $t = 0$ e $\overline{\gamma}(0) = q \in U$, sendo U um aberto de $\mathbb{R}^2$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{\gamma}((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq U$. Portanto, se considerarmos a restrição de $\overline{\gamma}$ ao intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, podemos efectuar a composição com o mapa σ de S e obter uma curva $\gamma = \sigma \circ \overline{\gamma}$ em S que passa por p (pois $\gamma(0) = p$):

$$(-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{\overline{\gamma}} U \xrightarrow{\sigma} W \subseteq S.$$

Como $\gamma(0) = \sigma(\overline{\gamma}(0)) = \sigma(q) = p$, $\overline{\gamma}_1'(0) = c_1$ e $\overline{\gamma}_2'(0) = c_2$, temos

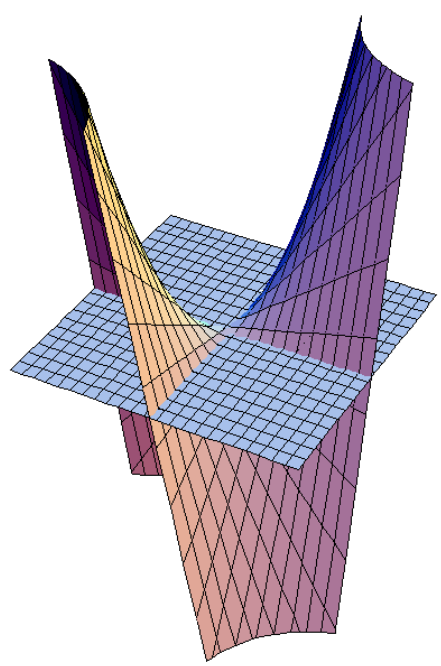
$$\begin{aligned} &J_\gamma(0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\overline{\gamma}}(0) \Leftrightarrow \\ &\gamma'(0) = c_1\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) + c_2\frac{\partial\sigma}{\partial y}(q) \Leftrightarrow \\ &\gamma'(0) = v \end{aligned}$$

e, portanto, v é tangente a S em p. ■

A este espaço vectorial de $\mathbb{R}^3$, formado pelos vectores tangentes a S em p, chama-se *espaço tangente* de S em p. Como $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)$ são linearmente independentes, o espaço tangente a S em p, habitualmente denotado por T_pS, tem dimensão 2. Temos assim um plano, o chamado *plano tangente* a S em p:

$$\Pi_pS = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : x = p + \lambda_1\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) + \lambda_2\frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)\Big\}.$$

A figura seguinte mostra o plano tangente ao parabolóide hiperbólico $z = xy$, na origem $(0, 0, 0)$.



$\Pi_p S$ é completamente determinado por um vector unitário a ele perpendicular, chamado *normal unitária* de S em p. Existem, como é evidente, dois vectores nessas condições. A Proposição 4.1 mostra, no entanto, que a escolha de um mapa $\sigma : U \to S$ contendo p conduz a uma escolha definitiva, nomeadamente

$$N_\sigma(p) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)}{\|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)\|}.$$

Este vector é chamado *vector normal unitário standard.* Mas, ao contrário do plano tangente, este vector não é totalmente independente da escolha do mapa σ de S contendo p. Com efeito, seja $\tilde\sigma : \tilde U \to S$ outro mapa no atlas de S tal que $\tilde\sigma(\tilde q) = p$. Vimos anteriormente (na demonstração da Proposição 2.5) que

$$\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial x}(\tilde q) \wedge \frac{\partial\tilde\sigma}{\partial y}(\tilde q) = det(J_\Phi(\tilde q)) \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)\Big),$$

onde Φ denota a mudança de coordenadas $\sigma^{-1} \circ \tilde\sigma$ de $\tilde\sigma$ para σ. Portanto

$$N_{\tilde\sigma}(p) = \frac{\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial x}(\tilde q) \wedge \frac{\partial\tilde\sigma}{\partial y}(\tilde q)}{\|\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial x}(\tilde q) \wedge \frac{\partial\tilde\sigma}{\partial y}(\tilde q)\|} = \pm\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)}{\|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)\|} = \pm N_\sigma(p),$$

onde o sinal é o do determinante de $J_\Phi(\tilde q)$.

Isto conduz-nos à seguinte definição:

Definição. Uma superfície S diz-se *orientável* se possuir um atlas com a seguinte propriedade: se $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde\sigma$ é a mudança de coordenadas entre quaisquer dois mapas do atlas, então $det(J_\Phi(\tilde q)) > 0$ em qualquer ponto $\tilde q$ do domínio de Φ.

Tal atlas diz-se uma *orientação* de S.

Portanto, numa superfície orientável existe uma escolha canónica da normal unitária $N(p)$, em cada ponto p, obtida tomando a normal unitária standard de cada mapa de um atlas orientado de S (escolha essa que depende suavemente de p), ou seja, existe $N : S \to \mathbb{R}^3$, suave, tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \in (T_pS)^\perp$ para cada $p \in S$. A uma função N destas chama-se *campo de vectores normais unitários* em S.

Em conclusão:

Proposição 4.2. *Se uma superfície S é orientável então possui um campo de vectores normais unitários $N : S \to \mathbb{R}^3$.* ∎

O recíproco de 4.2 também é verdadeiro, mas não o provaremos. Em suma, a existência de um campo de vectores normais unitários caracteriza a orientabilidade de uma superfície.

Exemplos. (1) Qualquer superfície que admita uma parametrização global é orientável. Em particular, qualquer gráfico G_f é uma superfície orientável.

(2) Seja S uma superfície do tipo $f^{-1}(a)$ (sendo a um valor regular de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Neste caso, para cada mapa $\sigma : U' \to W \subseteq S$, $f \circ \sigma$ é constante ($f(\sigma(x)) = a$ para cada $x \in U'$) pelo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = J_f(p) \cdot J_\sigma(q)$$

para cada $p = \sigma(q) \in W$. Consequentemente, como $J_f(p) = \nabla f(p)$,

$$(\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)) = 0 \ \text{ e } \ (\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)) = 0.$$

Portanto, $\nabla f(p) \in (T_p S)^\perp$ e

$$\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

é uma boa escolha para $N(p)$ pois define um campo de vectores normais unitários em S. Podemos então concluir que toda a superfície deste tipo (como, por exemplo, o toro, o elipsóide, os hiperbolóides, etc.) é orientável.

Isto também mostra que neste tipo de superfícies podemos determinar o plano tangente em qualquer ponto sem precisar de conhecer nenhum mapa da superfície contendo esse ponto. Com efeito, como

$$\Big(\nabla f(p) | \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)\Big) = 0 \ \text{ e } \ \Big(\nabla f(p) | \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\Big) = 0,$$

então

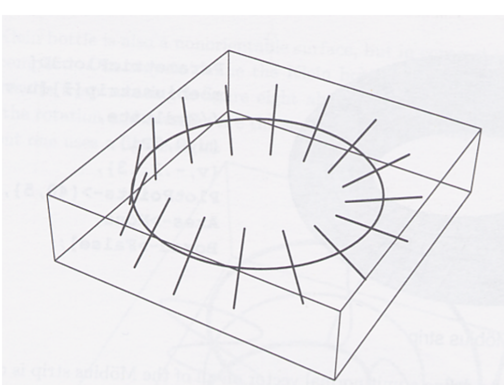
$$T_p S =< \nabla f(p) >^\perp$$

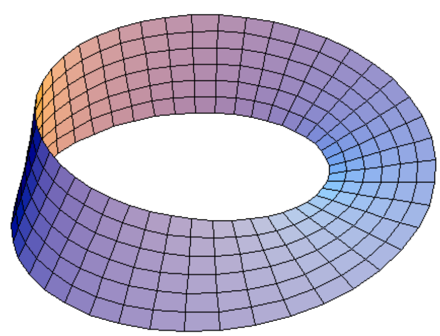
e

$$\Pi_p S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p \mid \nabla f(p)) = 0\}.$$

(3) Todos os exemplos de superfícies que vimos até ao momento são superfícies orientáveis. Vejamos agora um exemplo de uma superfície que não é orientável.

A *fita de Möbius* $\mathcal{M}$ é a superfície que se obtem rodando um segmento de recta $\mathcal{L}$ em torno do seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência $\mathcal{C}$, de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ dá meia volta em torno de P.





Se tomarmos para $\mathcal{C}$ a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano OXY e para $\mathcal{L}$ o segmento de comprimento 1 paralelo ao eixo OZ e com ponto médio $P = (1, 0, 0)$ então, após P ter rodado θ radianos em torno de OZ, $\mathcal{L}$ terá rodado $\theta/2$ radianos em torno de P (no plano contendo P e o eixo OZ). O ponto de $\mathcal{L}$ inicialmente em $(1, 0, t)$ estará então, após essa rotação de ângulo θ, no ponto

$$\sigma(t, \theta) = \Big((1 - t \sin\frac{\theta}{2}) \cos\theta, (1 - t \sin\frac{\theta}{2}) \sin\theta, t \cos\frac{\theta}{2}\Big).$$

Consideremos para domínio de σ o aberto

$$U = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Podemos definir um segundo mapa $\tilde{\sigma}$ pela mesma fórmula de σ mas com domínio

$$\tilde{U} = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, -\pi < \theta < \pi\}.$$

Estes dois mapas formam um atlas de $\mathcal{M}$ (Exercício 3.10), pelo que a fita de Möbius é uma superfície.

Calculemos a normal unitária standard N_σ em pontos da circunferência $\mathcal{C}$ (onde $t = 0$). Em tais pontos $p = \sigma(0, \theta)$, temos

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0, \theta) = \Big(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, -\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \cos\frac{\theta}{2}\Big), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(0, \theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

pelo que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0, \theta) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(0, \theta) = \Big(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\Big).$$

Trata-se de um vector unitário, pelo que é igual a $N_\sigma(p)$.

Se a fita de Möbius fosse orientável, existiria um campo de vectores normais unitários em $\mathcal{M}$, $N : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$, variando suavemente em $\mathcal{M}$. Num ponto $p = \sigma(0, \theta)$ de $\mathcal{C}$, teríamos

$$N(p) = \lambda(\theta)N_\sigma(p),$$

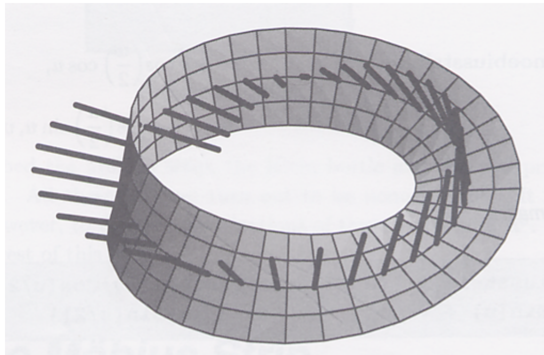
onde $\lambda : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ é suave e $\lambda(\theta) = \pm 1$ para qualquer θ. Consequentemente, $\lambda(\theta) = 1$ para qualquer $\theta \in (0, 2\pi)$, ou $\lambda(\theta) = -1$ para qualquer $\theta \in (0, 2\pi)$. Substituindo $N(p)$ por $-N(p)$ no caso em que $\lambda(\theta) = -1$, podemos assumir que $\lambda(\theta)$ é sempre 1. Então, no ponto $p_0 = \sigma(0, 0) = \sigma(0, 2\pi)$, como N é suave, teremos que ter

$$N(p_0) = \lim_{\theta\downarrow 0} N_\sigma(p) = \lim_{\theta\downarrow 0}\Big(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\Big) = (-1, 0, 0)$$

e também

$$N(p_0) = \lim_{\theta\uparrow 2\pi} N_\sigma(p) = \lim_{\theta\uparrow 2\pi}\Big(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\Big) = (1, 0, 0).$$

Esta contradição mostra que a fita de Möbius não é orientável.



Exercícios

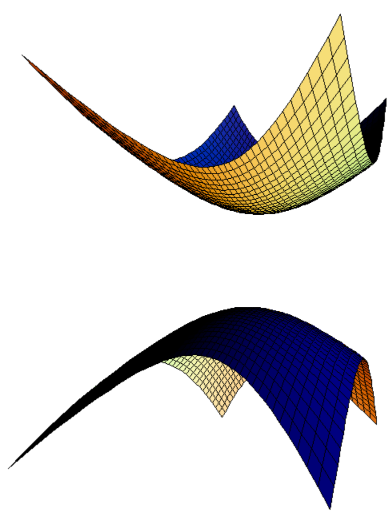
4.1 Considere o *cone* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$. Prove, usando a definição, que se trata de uma superfície. Mostre que $\mathcal{S}$ tem o mesmo plano tangente nos pontos pertencentes à recta $x = 0, y = z$.

4.2 Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2y^2$.

(a) Determine o conjunto dos valores regulares de f.

(b) Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 = c\}$, $c \in \mathbb{R}^+$. Prove que qualquer plano tangente a $\mathcal{S}$ é paralelo à recta $x = 1, y = 2$.

4.3 Considere o *hiperbolóide de duas folhas* $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$.



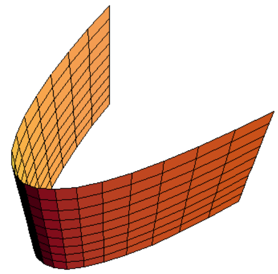
(a) Justifique que $\mathcal{H}$ é uma superfície.

(b) Determine os pontos de $\mathcal{H}$ nos quais o plano tangente é paralelo ao eixo OZ.

4.4 Considere a superfície $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin x \sin y \sin(x+y)\}$. Determine os pontos de $\mathcal{S}$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano de equação $z = 0$.

4.5 Considere a superfície $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + 3xy^2\}$. Mostre que existem pontos de $\mathcal{S}$ para os dois lados do plano tangente a $\mathcal{S}$ em $(0, 0, 0)$.

4.6 Considere o *cilindro parabólico* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$.



(a) Prove que $\mathcal{S}$ é uma superfície que pode ser coberta por uma parametrização.

(b) Determine a recta normal a $\mathcal{S}$ em $(0,0,0)$.

4.7 Seja $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{e^x}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)\}$. Determine uma equação para o plano tangente a $\mathcal{S}$ em $(0,1,1)$. Verifique se $(1,1,0)$ pertence à recta normal a $\mathcal{S}$ em $(0,1,1)$.

4.8 Considere o *cilindro elíptico* $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1\}$, com $p, q \neq 0$, constantes.

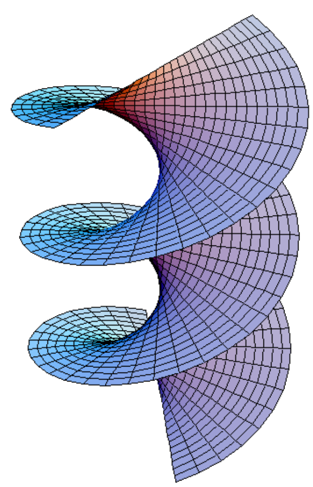
(a) Prove que o plano tangente a $\mathcal{S}$ nos pontos da recta

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0, \frac{x_0^2}{p^2} + \frac{y_0^2}{q^2} = 1\}$$

permanece constante.

(b) Mostre que qualquer normal a $\mathcal{S}$ é paralela ao plano de equação $z = 0$.

4.9 Um *helicóide* é a superfície descrita por uma hélice de avião quando, quer o avião quer a hélice, se movem com velocidade constante. Portanto, um helicóide é a superfície gerada por um segmento de recta, que roda a velocidade constante em torno de um eixo a ele perpendicular, enquanto simultaneamente se move ao longo desse eixo com velocidade constante.



Se o avião estiver a voar ao longo do eixo OZ, mostre que o helicóide pode ser parametrizado por $\phi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, \lambda u)$, onde λ é uma constante. Mostre ainda que a co-tangente do ângulo que a normal unitária de ϕ num ponto P faz com o eixo OZ é proporcional à distância de P ao eixo.

4.10 A *fita de Möbius* $\mathcal{M}$ é a superfície que se obtem rodando um segmento de recta $\mathcal{L}$ em torno do seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência $\mathcal{C}$, de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ dá meia volta em torno de P. Se tomarmos para $\mathcal{C}$ a circunferência $x^2+y^2=1$ no plano OXY e para $\mathcal{L}$ o segmento de comprimento 1 paralelo ao eixo OZ e com ponto médio $P=(1,0,0)$ então, após P ter rodado θ radianos em torno de OZ, $\mathcal{L}$ terá rodado $\theta/2$ radianos em torno de P (no plano contendo P e o eixo OZ).

(a) Mostre que o ponto de $\mathcal{L}$ inicialmente em $(1,0,t)$ estará, após essa rotação de ângulo θ, no ponto

$$\sigma(t,\theta)=\Big((1-t\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta,(1-t\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta,t\cos\frac{\theta}{2}\Big). \qquad (*)$$

(b) Tome para domínio de σ o aberto $U=\{(t,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid -1/2<t<1/2, 0<\theta<2\pi\}$. Sendo $\tilde{U}=\{(t,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid -1/2<t<1/2, -\pi<\theta<\pi\}$, considere $\tilde{\sigma}:\tilde{U}\to\mathcal{M}$ também definida por $(*)$. Mostre que σ e $\tilde{\sigma}$ formam um atlas de $\mathcal{M}$.

(c) Mostre que $N_\sigma(p)$, para $p=\sigma(0,\theta)$, é igual a $(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2},-\sin\theta\cos\frac{\theta}{2},-\sin\frac{\theta}{2})$.

(d) Verifique que $\lim_{\theta\downarrow 0}N_\sigma(p)=(-1,0,0)$ e $\lim_{\theta\uparrow 2\pi}N_\sigma(p)=(1,0,0)$.

(Isto mostra que a fita de Möbius não é orientável.)

4.11 Seja $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ uma curva plana cuja imagem está contida em

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, z>0\}$$

e seja S a superfície de revolução obtida rodando γ em torno do eixo OY. Sendo

$$\begin{array}{rcl}\alpha: J & \longrightarrow & \gamma(I)\\ t & \longmapsto & (0,\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\end{array}$$

uma curva com velocidade constante, considere:

- para cada $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}\alpha_\theta: J & \longrightarrow & S\\ t & \longmapsto & (\alpha_2(t),\alpha_3(t)\cos\theta,\alpha_3(t)\sin\theta);\end{array}$$

- para cada $t\in J$,

$$\begin{array}{rcl}\beta_t: \mathbb{R} & \longrightarrow & S\\ \theta & \longmapsto & (\alpha_2(t),\alpha_3(t)\cos\theta,\alpha_3(t)\sin\theta).\end{array}$$

As curvas α_θ chamam-se *meridianos* de S, e as circunferências β_t chamam-se *paralelos* de S (recorde o que vimos na secção anterior sobre as superfícies de revolução).

(a) Mostre que os meridianos e os paralelos se intersectam sempre ortogonalmente, isto é, $(\alpha_\theta'(t)\mid\beta_t'(\theta))=0$ para quaisquer $t\in J$, $\theta\in\mathbb{R}$.

(b) Sabendo que uma *geodésica* de uma superfície S é uma curva $\gamma:I\to S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^\perp$ para todo o $t\in I$, prove que:

(i). Cada meridiano α_θ é uma geodésica da superfície de revolução S acima definida.

(ii). Um paralelo β_t é uma geodésica se e só se $\alpha_3'(t)=0$.