Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

---

1. Considere a *espiral logaritmica*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (e^t \cos t, e^t \sin t). \end{array}$$

   (a) Calcule o comprimento de γ em $[0, 2\pi]$.

   (b) Determine uma reparametrização de γ por comprimento de arco.

   (c) Prove que o ângulo entre γ e o seu vector tangente é constante. Quanto mede esse ângulo?

2. Seja a uma constante não nula. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não constante, tal que as normais principais à curva $\gamma : t \longmapsto (a \cos t, a \sin t, \varphi(t))$ sejam paralelas ao plano $z = 0$.

3. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) Toda a curva plana é uma hélice generalizada.

   (b) Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco e com curvatura constante. A curva α definida por $\alpha(s) = \int_0^s B_\gamma(u)\, du$ é uma curva de torsão constante.

   (c) Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice generalizada (cuja curvatura nunca se anula) então o quociente $\tau_\gamma(t)/\kappa_\gamma(t)$ é constante ao longo de $t \in I$.

   (d) Todo o difeomorfismo equiareal é uma isometria.

4. (a) Seja $S = f^{-1}(a)$ uma superfície, onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação C^∞ e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, e seja p um ponto de S. Deduza uma equação para o plano tangente a S em p em termos do gradiente $\nabla f(p)$ de f em p.

   (b) Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid yx^2 + y^2 = 1\}$.

      (i) Justifique que C é uma superfície.

      (ii) Determine uma equação para o plano tangente a C em $p = (0, 1, 2)$.

5. (a) Determine a segunda forma fundamental de uma superfície de revolução parametrizada por

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & I \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & S \\ & (u, v) & \longmapsto & (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \end{array}$$

   onde $f : I \to \mathbb{R}$ é positiva.

   (b) Seja S a superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana $z = \cos x$, $x \in]0, 2\pi[$, em torno do eixo OZ. Determine os pontos da curva que dão origem, respectivamente, aos pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos de S.
