

Apontamentos
de
GEOMETRIA DIFERENCIAL

Jorge Picado

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

2003

Os apontamentos que se seguem contêm as notas das aulas da disciplina de Geometria Diferencial. Inclui-se ainda algum material extra, com o intuito de obviar o risco que se corre, num curso introdutório de Geometria Diferencial, dos resultados interessantes que se poderão colher não compensarem o trabalho dispendido com a introdução e formulação rigorosa dos conceitos. Este material poderá servir como referência para os estudantes mais curiosos que, porventura, queiram aprofundar certos temas.

Na sua elaboração baseámo-nos em [10], [5] e [8]. Nas demonstrações de muitos dos resultados fundamentais seguimos de perto as notas do Professor F. J. Craveiro de Carvalho:

- *Notas sobre Geometria Diferencial de curvas em \mathbb{R}^3* , Universidade de Coimbra, 1987;
- *Superfícies em \mathbb{R}^3* , Universidade de Coimbra, 1989.

Resumo

Em Geometria Diferencial estudam-se objectos de natureza geométrica – curvas e superfícies – usando as técnicas do cálculo diferencial e integral. A geometria diferencial clássica engloba o estudo das propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano. Tem as suas origens no século XIX, com os primórdios da Análise, e nela se estudam as propriedades locais, isto é, aquelas que dependem somente do comportamento da curva ou superfície na vizinhança de um ponto. Por isso é usual chamar-lhe *teoria local de curvas e superfícies*. A geometria diferencial moderna estuda a influência das propriedades locais no comportamento de toda a curva ou superfície (*teoria global de curvas e superfícies*) e estende o estudo aos espaços não euclidianos e variedades de qualquer dimensão, baseando-se ainda, no entanto, nos métodos do cálculo diferencial e integral.

Neste curso abordamos os temas clássicos da geometria diferencial: curvas e superfícies no plano e no espaço. Estudamos assim resultados obtidos na sua quase totalidade no século XIX. Curvas e superfícies são objectos que qualquer pessoa pode ver, e muitas das questões que podem ser levantadas sobre estes objectos são óbvias e naturais. A geometria diferencial preocupa-se com a formulação matemática de algumas dessas questões e em tentar encontrar respostas para elas, usando as técnicas do cálculo diferencial.

Num primeiro capítulo dedicamo-nos ao estudo das curvas. Num segundo (e último) capítulo estudamos a teoria local das superfícies, cuja génese se deve a Gauss com

o seu famoso trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Comm. Soc. Göttingen Bd 6, 1823-1827) [4].

Tentamos seguir sempre a abordagem mais directa e simples a cada resultado, mantendo sempre os pré-requisitos no mínimo possível. Esta parece-nos ser a abordagem certa para um primeiro estudo da geometria diferencial, motivando os conceitos e os problemas e fundamentando a intuição.

Pré-requisitos

Conhecimentos básicos de Análise e Álgebra Linear (incluindo matrizes e determinantes).

Capítulo I: O espaço euclidiano \mathbb{R}^n (a estrutura de espaço vectorial de \mathbb{R}^n , produto escalar, produto vectorial, produto misto, norma euclidiana); Funções vectoriais de variável real (limites, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade).

Capítulo II: O espaço métrico \mathbb{R}^n (distância euclidiana, bolas abertas, abertos, conexos, subespaços métricos de \mathbb{R}^n); Funções vectoriais de variável vectorial (continuidade e diferenciabilidade em \mathbb{R}^n).

Material de estudo

Além destes apontamentos recomendamos:

- O. Neto, *Tópicos de Geometria*, Universidade Aberta, 1999. (51N/NET)¹
- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2001. (53-01/PRE)
- M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976. (53C/CAR)
- A. Goetz, *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1968. (53-01/GOE)

O livro

- A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993. (53-01/GRA)

contém inúmeros exemplos, com ilustrações, de curvas e superfícies em \mathbb{R}^3 .

Podem ser encontradas mais informações sobre a disciplina (incluindo os sumários das aulas teóricas, algumas notas históricas, etc.) em

<http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/>

¹Entre parênteses indica-se a cota do livro na Biblioteca do DMUC.

Índice

| | |
|---|-----|
| <i>Capítulo I. Curvas em \mathbb{R}^3</i> | 1 |
| 1. Preliminares | 1 |
| 2. O que é uma curva? | 8 |
| 3. Curvatura e torsão; triedro de Frenet-Serret | 23 |
| 4. Curvas planas | 35 |
| 5. Teorema fundamental das curvas | 48 |
| 6. Hélices generalizadas | 53 |
| | |
| <i>Capítulo II. Superfícies em \mathbb{R}^3</i> | 57 |
| 1. Preliminares | 57 |
| 2. O que é uma superfície? | 60 |
| 3. Algumas classes especiais de superfícies | 77 |
| 4. Tangentes e normais; orientabilidade | 91 |
| 5. Primeira forma fundamental | 99 |
| 6. A aplicação de Gauss e a segunda forma fundamental | 116 |
| 7. O Teorema Egregium de Gauss | 138 |
| | |
| <i>Bibliografia</i> | 149 |

I

Curvas em \mathbb{R}^3

1. Preliminares

O espaço euclidiano \mathbb{R}^n

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

constituído por todas as seqüências ordenadas de n números reais. Os seus elementos (x_1, x_2, \dots, x_n) são denominados *pontos* de \mathbb{R}^n e os números reais x_1, x_2, \dots, x_n dizem-se *coordenadas* (ou *componentes*).

Este conjunto munido das operações (vectoriais) *adição*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

e *multiplicação escalar*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, (x_1, \dots, x_n)) &\longmapsto (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

é um espaço vectorial (real) de dimensão n . Por isso os elementos de \mathbb{R}^n dizem-se também *vectores* (usaremos a notação $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para denotá-los) e os números reais, *escalares*.

É ainda possível definir a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x \mid y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Esta aplicação chama-se *produto escalar*. Trata-se de um *produto interno* em \mathbb{R}^n , visto satisfazer os axiomas de definição de produto interno:

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x \mid x) > 0$;
- (2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (x \mid y) = (y \mid x)$;
- (3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$.

Portanto, estando em \mathbb{R}^n definido um produto interno, \mathbb{R}^n é um *espaço euclidiano* (de dimensão n). Claro que se podem definir outros produtos internos em \mathbb{R}^n . Este que aqui definimos é normalmente designado por produto escalar ou *produto interno canónico*.

Observação: Embora estas noções abstractas de espaço vectorial e espaço euclidiano estejam aparentemente divorciadas da geometria, os vectores e as operações vectoriais (adição, multiplicação escalar, produto escalar) têm uma interpretação (representação) geométrica interessante em espaços de dimensão ≤ 3 .

Estando em \mathbb{R}^n definido um produto interno, é possível associar-lhe uma norma, dita *norma euclidiana*:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x | x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{array}$$

Assim sendo, diz-se que \mathbb{R}^n é um *espaço normado*. À imagem de um vector x por esta função chama-se *norma* de x e representa-se por $\|x\|$.

Esta aplicação assim definida satisfaz, de facto, os denominados axiomas de norma:

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \|x\| > 0$;
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Note-se que em \mathbb{R}^n se podem definir outras normas, isto é, outras aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} satisfazendo os axiomas (1), (2) e (3) de norma. Apenas trabalharemos, contudo, com a norma euclidiana $\|x\| = (x | x)^{\frac{1}{2}}$.

O produto escalar e a norma euclidiana satisfazem ainda as seguintes propriedades:

- $(x | y) = \|x\| \|y\| \cos \angle(x, y)$;
- $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Trabalharemos ainda com o produto vectorial

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & x \wedge y \end{array}$$

(cuja definição e propriedades básicas serão enumeradas nas aulas práticas) e com o produto misto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & [x, y, z] := (x | y \wedge z), \end{array}$$

que satisfaz as propriedades:

- $[x, y, z] = (x \wedge y | z)$;

$$\bullet [x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

- $[x, y, z] = 0$ se e só se x, y e z são linearmente dependentes.

Funções vectoriais de variável real

O conceito de função vectorial de variável real será fundamental no nosso estudo.

Seja I um intervalo de \mathbb{R} . Uma aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se uma *função vectorial de variável real*. Nesta definição I poderá ser um qualquer dos intervalos $[a, b]$, $[a, b)$ (b podendo ser $+\infty$), $(a, b]$ (a podendo ser $-\infty$) ou (a, b) (a podendo ser $-\infty$ e b podendo ser $+\infty$).

Estas funções chamam-se funções vectoriais de variável real porque, de facto, associam a cada real $t \in I$ um vector $f(t)$ de \mathbb{R}^n .

Se considerarmos para $i = 1, 2, \dots, n$ as projecções

$$\begin{aligned} \Pi_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

e denotarmos por f_i a composição $\Pi_i \circ f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escrever $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$. Isto significa que cada função vectorial de variável real f origina n funções reais de variável real f_1, f_2, \dots, f_n , cujos valores em t são as componentes de $f(t)$. Indicaremos este facto utilizando a notação

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

e chamaremos a f_i a i -ésima *componente* de f .

Os conceitos de limite, derivada, integral e continuidade de funções reais de variável real podem ser estendidos às funções vectoriais de variável real:

LIMITES

Definição 1.1. Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vectorial de variável real e t_0 um ponto aderente de I . Diz-se que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = u$ se, para todo $\epsilon > 0$, for possível determinar $\delta > 0$ tal que

$$(t \in I \text{ e } 0 < |t - t_0| < \delta) \Rightarrow \|f(t) - u\| < \epsilon.$$

Se tivermos presente a noção de limite de uma função real de variável real a seguinte proposição tem demonstração imediata:

Proposição 1.2. Sejam $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, t_0 um ponto aderente de I e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Então $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = u$ se e só se $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = u_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. ■

CONTINUIDADE

Definição 1.3. Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$. Diz-se que f é *contínua* em t_0 se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

A função diz-se *contínua no intervalo* $J \subseteq I$ se for contínua em todos os pontos de J .

Atendendo à Proposição 1.2 é óbvio que $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ é contínua em t_0 se e só se, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f_i é contínua em t_0 .

São igualmente válidos, como no caso das funções reais de variável real, os teoremas relativos à continuidade da soma de funções vectoriais contínuas, do produto de uma função escalar contínua por uma função vectorial contínua e dos produtos escalar e vectorial de funções contínuas.

DIFERENCIABILIDADE

Definição 1.4. Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$. A função f diz-se *diferenciável em* t_0 se existir o limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

A este limite chama-se *derivada de f em t_0* e representa-se por $f'(t_0)$.

Note-se que a razão incremental $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ é o produto do vector $f(t) - f(t_0)$ pelo escalar $\frac{1}{t - t_0}$.

Se $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, como

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right),$$

então, atendendo à Proposição 1.2, f é diferenciável em t_0 e $f'(t_0) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ se e só se, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f_i é diferenciável em t_0 e $f'_i(t_0) = u_i$.

Se f é diferenciável em todos os pontos de um intervalo $I_1 \subseteq I$ diz-se que é *diferenciável no intervalo* I_1 e a derivada f' é uma função vectorial definida neste intervalo e poderemos escrever

$$\begin{aligned} f' : I_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto f'(t). \end{aligned}$$

Admitamos que a função f' assim definida é diferenciável num intervalo $I_2 \subseteq I_1$. A derivada de f' em cada ponto t_0 de I_2 será, por definição, o limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0}.$$

e designa-se por *segunda derivada* da função vectorial f , ou *derivada de segunda ordem*, e representa-se por $f''(t)$ ou $f^{(2)}(t)$. Portanto $f^{(2)} : t \mapsto f^{(2)}(t)$ é uma função vectorial definida em I_2 .

Se as sucessivas condições de diferenciabilidade forem satisfeitas poderemos definir a terceira derivada, a quarta derivada, etc. A *derivada de ordem n* de f , que denotaremos por $f^{(n)}$, é definida por $f^{(n-1)'}$, sendo ela própria uma função vectorial:

$$\begin{aligned} f^{(n)} : I_n \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Definição 1.5. Uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se *suave* se é infinitamente diferenciável, ou seja, se todas as derivadas f', f'', f''', \dots existem (em particular, são contínuas).

Proposição 1.6. *Sejam $f : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $f(I_1) \subseteq I_2$, f é diferenciável em t_0 e g é diferenciável em $f(t_0)$. Então $g \circ f$ é diferenciável em t_0 e*

$$(g \circ f)'(t_0) = f'(t_0)g'(f(t_0)).$$

Demonstração: Como $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ é diferenciável em $f(t_0)$, cada g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) é diferenciável em $f(t_0)$. Recordando o resultado da derivada da função composta para funções reais de variável real podemos concluir que cada $g_i \circ f$ é diferenciável em t_0 e que $(g_i \circ f)'(t_0) = f'(t_0)g'_i(f(t_0))$. Consequentemente, como $g \circ f = (g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f)$, $g \circ f$ é diferenciável em t_0 e

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(t_0) &= ((g_1 \circ f)'(t_0), \dots, (g_n \circ f)'(t_0)) \\ &= (f'(t_0)g'_1(f(t_0)), \dots, f'(t_0)g'_n(f(t_0))) \\ &= f'(t_0)(g'_1(f(t_0)), \dots, g'_n(f(t_0))) \\ &= f'(t_0)g'(f(t_0)). \end{aligned}$$

■

INTEGRABILIDADE

Definição 1.7. Uma função $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se *integrável em $[a, b]$* se cada f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) for integrável em $[a, b]$ e define-se $\int_a^b f(t)dt$ como sendo o vector $(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt)$.

Para terminar listemos as propriedades do integral que utilizaremos ao longo do curso:

- (1) $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt;$
 $\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt.$
- (2) Para cada $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$
- (3) Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, $\int_a^b \|v\|dt = \|\int_a^b vdt\|.$
- (4) Se f é integrável em $[a, b]$ então

$$\begin{aligned} \|f\| : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|f(t)\| \end{aligned}$$

é integrável em $[a, b]$ e

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

- (5) Se f é contínua em $[a, b]$ então é integrável em $[a, b]$ (porque nesse caso cada componente de f é contínua em $[a, b]$ logo é integrável em $[a, b]$).
- (6) **[Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo]** Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $[a, b] \subseteq I$. Para $c \in [a, b]$ defina-se $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $A(x) = \int_c^x f(t) dt$. Então, para cada $x \in (a, b)$, $A'(x)$ existe e é igual a $f(x)$.
- (7) **[Segundo Teorema Fundamental do Cálculo]** Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no intervalo aberto I e seja F uma primitiva de f em I . Então, para quaisquer $c, d \in I$, $\int_c^d f(t) dt = F(d) - F(c)$.

Exercícios

1.1 Mostre que o produto escalar e a norma euclidiana em \mathbb{R}^n satisfazem as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (a) $(x | x) > 0$ se $x \neq 0$.
- (b) $(x | y) = (y | x)$.
- (c) $(\alpha x + \beta y | z) = \alpha(x | z) + \beta(y | z)$.
- (d) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$.
- (e) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- (f) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (g) $(x | y) = \|x\| \|y\| \cos \angle(x, y)$.
- (h) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

1.2 Em \mathbb{R}^3 considere uma base ortonormada (f_1, f_2, f_3) que determine a mesma orientação que a base canônica. Dados dois vectores x e y defina $x \wedge y$ usando o determinante simbólico cuja primeira linha é $f_1 \ f_2 \ f_3$ sendo a segunda e terceira formadas, respectivamente, pelas coordenadas de x e y . O objectivo das alíneas seguintes é mostrar que o produto vectorial $x \wedge y$ não depende da base, nas condições anteriores, que se fixa.

- (a) Prove que $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x | y)^2$.
- (b) Prove que se x e y são não nulos então $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \theta$, sendo θ o ângulo formado por x e y .
- (c) Prove que $(x \wedge y | x) = (x \wedge y | y) = 0$.
- (d) Mostre que sendo $x \wedge y \neq 0$ então $(x, y, x \wedge y)$ é uma base ordenada que determina a mesma orientação que (f_1, f_2, f_3) .
- (e) Mostre que $x \wedge y = 0$ se e só se x e y são linearmente dependentes.
- (f) Considerando (e_1, e_2, e_3) outra base ortonormada com a orientação usual de \mathbb{R}^3 , defina $x \bar{\wedge} y$ de forma análoga a $x \wedge y$. Mostre que $x \wedge y = x \bar{\wedge} y$.

1.3 Prove que o produto misto

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto [x, y, z] := (x \mid y \wedge z),\end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $[x, y, z] = (x \wedge y \mid z)$;

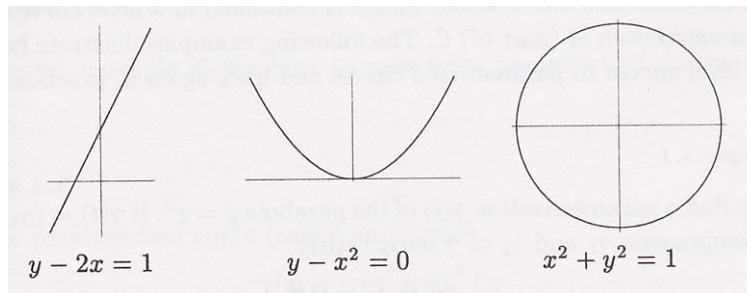
(b) $[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

(c) $[x, y, z] = 0$ se e só se x , y e z são linearmente dependentes.

2. O que é uma curva?

Vamos começar por discutir duas formulações matemáticas da noção intuitiva de curva. Daremos alguns exemplos de curvas de cada tipo e modos práticos de passar de um tipo para o outro.

Já todos temos uma ideia, pelo menos intuitiva, de curva. Quando questionado para dar um exemplo de uma curva, o leitor pode dar uma linha recta, por exemplo $y - 2x = 1$, ou uma circunferência, por exemplo $x^2 + y^2 = 1$, ou talvez uma parábola, por exemplo $y - x^2 = 0$.



Todas estas curvas são descritas por meio da sua equação cartesiana $f(x, y) = c$, onde f é uma função de x e y e c é uma constante. Deste ponto de vista, uma curva é um conjunto de pontos

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}. \quad (*)$$

Estes exemplos são todos de curvas no plano \mathbb{R}^2 , mas podemos também considerar curvas em \mathbb{R}^3 . Por exemplo, o eixo OX em \mathbb{R}^3 é a recta dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\},$$

e, mais geralmente, uma curva em \mathbb{R}^3 pode ser definida por um par de equações

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2.$$

Curvas deste tipo são chamadas *curvas de nível* (pois, por exemplo, a curva em $(*)$ é o conjunto de pontos (x, y) do plano nos quais a quantidade $f(x, y)$ atinge o “nível” c).

Existe um outro modo de pensar numa curva, mais útil em muitas situações. Consiste em olhar uma curva como o caminho traçado por um ponto a mover-se no espaço \mathbb{R}^3 . Portanto, se $\gamma(t)$ é o vector de posição do ponto no instante t , a curva é descrita por uma função γ de um parâmetro escalar t com valores no espaço vectorial \mathbb{R}^2 (caso a curva seja plana) ou em \mathbb{R}^3 . Usamos esta ideia para dar a primeira definição formal de curva em \mathbb{R}^n (só nos interessa os casos $n = 2$ e $n = 3$, mas é conveniente tratar ambos os casos simultaneamente):

Definição. Uma *curva parametrizada* em \mathbb{R}^n é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo I de \mathbb{R} . À imagem $\gamma(I)$ de uma curva parametrizada γ chamamos *traço* (por vezes também apelidada de *rasto* ou *caminho* da curva).

Em geral, o domínio I da curva pode ser um intervalo de qualquer tipo.

Uma curva parametrizada cujo traço esteja contido numa curva de nível C diz-se uma *parametrização* de (parte de) C . Os exemplos seguintes ilustram como passar de curvas de nível para curvas parametrizadas.

Exemplos 2.1. (a) Determinemos uma parametrização $\gamma(t)$ da parábola $y = x^2$. Se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, as componentes γ_1 e γ_2 de γ devem satisfazer

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \quad (2.1.1)$$

para todos os valores t do intervalo I onde γ está definida (ainda por decidir), e de tal modo que todo o ponto na parábola é igual a $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ para algum $t \in I$. É claro que existe uma solução óbvia para a equação (2.1.1): considere $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = t^2$. Para obtermos todos os pontos da parábola devemos permitir que t possa tomar qualquer valor real (pois a primeira coordenada de $\gamma(t)$ é justamente t e a coordenada no eixo OX de um ponto da parábola pode ser qualquer número real), pelo que temos de tomar $I = (-\infty, \infty)$. Portanto, a parametrização procurada é

$$\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Mas esta não é a única parametrização da parábola. Outra escolha possível é $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ com $I = (-\infty, \infty)$. Portanto, a parametrização de uma dada curva de nível não é necessariamente única.

(b) Tentemos agora a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. É tentador considerar $x = t$ como no exemplo anterior e, conseqüentemente, $y = \sqrt{1 - t^2}$ (também podíamos considerar $y = -\sqrt{1 - t^2}$). Mas isto define só uma parametrização da metade superior da circunferência, uma vez que $\sqrt{1 - t^2}$ é sempre ≥ 0 . Analogamente, se tivéssemos considerado $y = -\sqrt{1 - t^2}$, obteríamos somente uma parametrização da metade inferior da circunferência.

Se queremos uma parametrização de toda a circunferência, teremos que pensar um pouco mais. Precisamos de funções γ_1 e γ_2 tais que

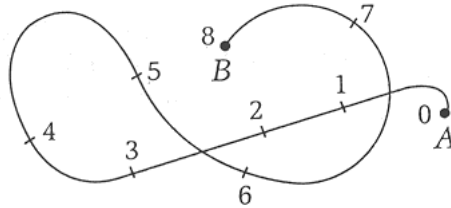
$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \quad (2.1.2)$$

para qualquer $t \in I$, e de tal modo que *todo* o ponto na circunferência é igual a $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ para algum $t \in I$. Existe uma solução óbvia para a equação (2.1.2): $\gamma_1(t) = \cos t$ e $\gamma_2(t) = \sin t$ (pois $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para qualquer t). Podemos tomar $I = (-\infty, \infty)$, embora tal seja desnecessário; bastará um intervalo aberto de comprimento maior (ou igual, caso o intervalo seja semi-aberto) que 2π .

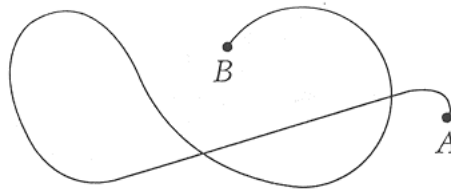
O exemplo seguinte mostra como passar de curvas parametrizadas para curvas de nível.

Exemplo 2.2. Consideremos a curva parametrizada (chamada *astróide*) definida por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e $I = \mathbb{R}$. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para qualquer t , as coordenadas $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ do ponto $\gamma(t)$ satisfazem $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. A curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$ coincide com o traço de γ .

É importante compreender a importância da definição de curva como uma função de um parâmetro t e perceber a distinção entre curva (parametrizada) e traço da curva. Por exemplo, suponhamos que uma formiga caminha de um ponto A até um ponto B e que, num mero exercício acadêmico, vamos marcando em cada instante t , com o número t , a sua posição (começando com $t = 0$ em A):



Quando a formiga chegar a B teremos traçado o caminho por ela percorrido. O mesmo efeito pode ser conseguido se seguirmos o rasto de uma lesma:



Existe no entanto uma diferença significativa. Olhando para o rasto da lesma não poderemos dizer se ela esteve parada durante algum tempo nalgum ponto; tão pouco poderemos dizer alguma coisa sobre se, nalgum troço do caminho, o percorreu várias vezes (para trás e para a frente).

É por estas razões que em Geometria Diferencial se está mais interessado na função

$$t \mapsto \text{posição da formiga no instante } t \quad (2.2.1)$$

do que no caminho sem a sua evolução ao longo do tempo, isto é, na imagem da função (2.2.1). Para dar um exemplo explícito, suponhamos que a viagem da lesma era descrita pela correspondência

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad (t \in [0, 1]).$$

O rasto que ela marcaria seria o da circunferência de raio 1

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

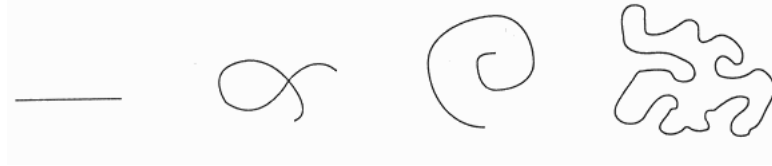
que é indistinguível do rasto que deixaria se o caminho percorrido fosse descrito pela correspondência

$$t \mapsto (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t) \quad (t \in [0, 1])$$

ou

$$t \mapsto (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \quad (t \in [0, 1]).$$

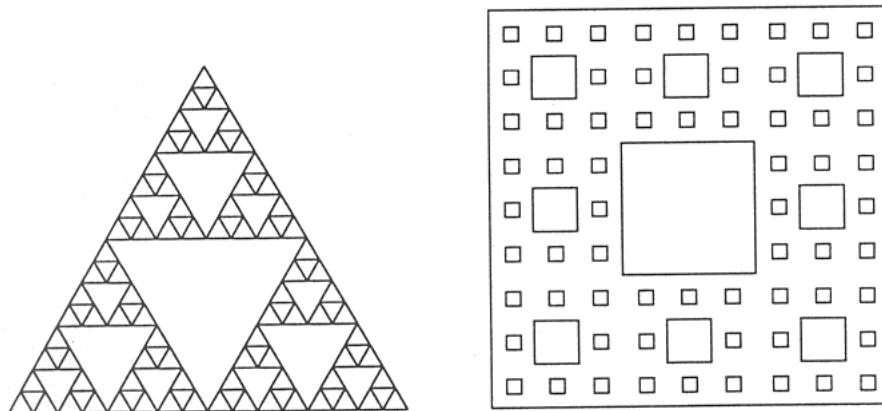
É por isso que em Geometria Diferencial adoptamos para definição de curva o conceito de curva parametrizada, ou seja uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Assumimos, além disso, por razões óbvias, que a função γ é contínua. Mas isso não chega. Com efeito, não será surpresa para ninguém que as seguintes figuras sejam exemplos de imagens de funções contínuas $I \rightarrow \mathbb{R}^3$:



Existe contudo um facto desconcertante sobre estas funções que estraga muita da nossa intuição: a figura seguinte também é um exemplo de imagem de uma destas funções.



Com efeito, em 1890 Peano apresentou um exemplo de uma função contínua de $[0, 1]$ em \mathbb{R}^2 (a que hoje se chama *curva de Peano*) cuja imagem preenche todo o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$, o que sai evidentemente fora do âmbito do nosso conceito intuitivo. Em 1915, Sierpiński construiu outros dois exemplos famosos de imagens contínuas planas do intervalo $[0, 1]$. Na figura seguinte podem ver-se os gráficos destas duas curvas, ou melhor, de aproximações destas duas curvas:



Estes exemplos mostram que teremos que impôr às curvas condições adicionais, além da continuidade, de modo a excluirmos as curvas de Peano e a nos mantermos perto da

intuição inicial. Dizemos que uma curva parametrizada γ é *suave* se γ é uma função suave, ou seja, se todas as derivadas $\gamma', \gamma'', \gamma''', \dots$ existem.

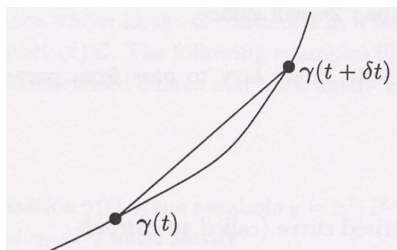
A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra “curva” estaremos a referir-nos a curvas parametrizadas suaves.

Definição. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva e $t \in I$. A $\gamma'(t)$ chamaremos *vector tangente* de γ no ponto $\gamma(t)$.

Para compreendermos a razão desta terminologia, notemos que o vector

$$\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

é paralelo à corda ligando os pontos $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \delta t)$ do traço C de γ :



É claro que, à medida que δt tende para zero, a corda se torna paralela à tangente a C em $\gamma(t)$. Portanto, a tangente deverá ser paralela a

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \gamma'(t).$$

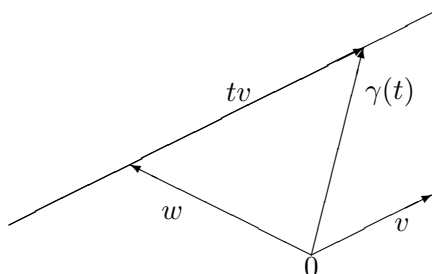
O seguinte resultado é intuitivamente claro:

Proposição 2.3. *Se o vector tangente a uma curva γ é constante, o traço de γ é (parte de) uma recta.*

Demonstração: Suponhamos que $\gamma'(t) = v$ para qualquer t , sendo v um vector constante. Então, integrando componente a componente, obtemos

$$\gamma(t) = \int \gamma'(t) dt = \int v dt = tv + w,$$

onde w é outro vector constante. Se $v \neq 0$, isto é a equação paramétrica da linha recta paralela a v e passando pelo ponto cujo vector de posição é w :



Se $v = 0$, o traço de γ é um único ponto (nomeadamente, o ponto cujo vector de posição é w). ■

Definição. Chama-se *recta tangente* à curva γ no ponto $\gamma(t)$ à recta determinada pelo ponto $\gamma(t)$ e pelo vector tangente $\gamma'(t)$.

Portanto, a equação cartesiana da recta tangente é

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : P = \gamma(t) + \lambda \gamma'(t)\}.$$

Um dos primeiros problemas que se colocam no estudo de uma curva é como definir o seu comprimento. Para encontrar tal fórmula, notemos que se δt é muito pequeno, a parte do traço de γ entre $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \delta t)$ é praticamente uma linha recta, pelo que o seu comprimento é aproximadamente

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\|.$$

Novamente porque δt é pequeno, $(\gamma(t + \delta t) - \gamma(t))/\delta t$ é aproximadamente igual a $\gamma'(t)$, pelo que o comprimento é aproximadamente

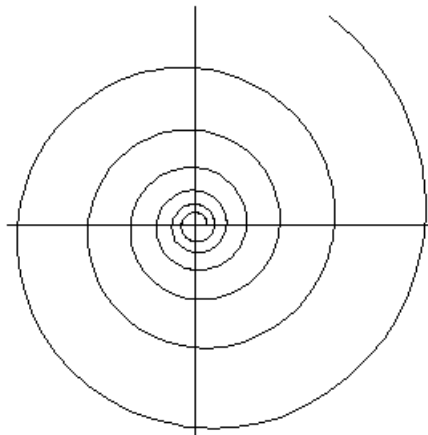
$$\|\gamma'(t)\| \delta t. \tag{2.3.1}$$

Se queremos calcular o comprimento de uma parte do traço de γ (não necessariamente pequena), podemos dividi-la em segmentos, cada um dos quais correspondendo a um pequeno incremento δt em t , calcular o comprimento de cada segmento usando (2.3.1), e adicionar tudo. Considerando δt a tender para zero, deveremos então obter o valor exacto do comprimento. Isto motiva a seguinte definição:

Definição. Dizemos que o *comprimento de arco* de uma curva γ a partir do ponto $\gamma(t_0)$ é a função s definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Exemplo 2.4. Para a *espiral logarítmica*



definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ($t \in [0, +\infty)$), temos

$$\gamma'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t) \right)$$

e

$$\|\gamma'(t)\|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}.$$

Logo, o comprimento de arco de γ a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$, por exemplo, é dado por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}} du = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Como

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = \|\gamma'(t)\|,$$

se pensarmos em $\gamma(t)$ como sendo a posição de um ponto móvel no instante t , ds/dt é a velocidade do ponto. Isto motiva a seguinte definição:

Definição. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. A *velocidade* de γ no ponto $\gamma(t)$ é o número real $v(t) = \|\gamma'(t)\|$. A curva γ diz-se *parametrizada por comprimento de arco* se $v(t) = 1$ para qualquer $t \in I$.

Veremos ao longo deste capítulo muitas fórmulas e resultados sobre curvas que tomam uma forma mais simples quando a curva está parametrizada por comprimento de arco. A razão para esta simplificação deve-se à seguinte proposição, que será muito útil na secção seguinte, onde estabelecemos toda a teoria de Frenet-Serret.

Proposição 2.5. *Em qualquer curva γ parametrizada por comprimento de arco, $(\gamma''(t)|\gamma'(t)) = 0$ para qualquer t , isto é, ou $\gamma''(t) = 0$ ou $\gamma''(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$, para qualquer t .*

Demonstração: Como a curva está parametrizada por comprimento de arco, temos $1 = \|\gamma'(t)\|^2 = (\gamma'(t)|\gamma'(t))$ para qualquer t . Por derivação relativamente a t obtemos $(\gamma''(t)|\gamma'(t)) + (\gamma'(t)|\gamma''(t)) = 0$, ou seja, $2(\gamma''(t)|\gamma'(t)) = 0$. ■

Observámos nos Exemplos 2.1 que uma dada curva de nível pode ter diversas parametrizações. Será importante compreendermos a relação entre elas.

Definição. Chama-se *mudança de parâmetro* a uma bijecção $\lambda : J \rightarrow I$ entre intervalos de \mathbb{R} , que é suave bem como a sua inversa λ^{-1} .

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. À composição $\gamma \circ \lambda$ de γ com uma mudança de parâmetro chama-se *reparametrização* de γ .

Exemplo 2.6. No Exemplo 2.1(b) obtivemos a parametrização $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ para a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Outra parametrização é $\tilde{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$. Para vermos que $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização de γ , temos que encontrar uma mudança de parâmetro λ tal que $(\cos \lambda(t), \sin \lambda(t)) = (\sin t, \cos t)$. Uma solução possível é $\lambda(t) = \pi/2 - t$.

Observações 2.7. (a) Como a inversa de qualquer mudança de parâmetro ainda é uma mudança de parâmetro, se $\alpha = \gamma \circ \lambda$ é uma reparametrização da curva γ , também γ é uma reparametrização de α .

(b) É evidente que duas curvas que são reparametrizações uma da outra têm o mesmo traço, pelo que terão as mesmas propriedades geométricas.

(c) Em qualquer mudança de parâmetro $\lambda : J \rightarrow I$, os intervalos I e J são do mesmo tipo (isto é, são simultaneamente abertos, fechados ou semi-abertos). A justificação desta afirmação reside no seguinte facto:

Se $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injectiva então é estritamente decrescente ou estritamente crescente.

(d) Uma bijecção suave $\lambda : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro se e só se λ' nunca se anula. Com efeito, se λ é uma mudança de parâmetro, como $\lambda^{-1} \circ \lambda = \text{id}$, temos $(\lambda^{-1} \circ \lambda)' = 1 \Leftrightarrow (\lambda^{-1})'(\lambda(t))\lambda'(t) = 1$ para qualquer $t \in J$, o que implica $\lambda'(t) \neq 0$ para qualquer $t \in J$. O recíproco será provado nas aulas práticas (Exercício 2.16).

O facto de λ' nunca se anular implica que $\lambda'(t) > 0$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda'(t) < 0$ para qualquer $t \in J$. No primeiro caso diz-se que λ *preserva a orientação*, e no segundo caso que *inverte a orientação*.

É claro que esperamos que o comprimento de arco seja uma propriedade geométrica e, portanto, que não dependa da parametrização. A seguinte proposição confirma-nos isso mesmo:

Proposição 2.8. *Seja $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização da curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então os comprimentos de α e β coincidem.*

Demonstração: Seja λ a mudança de parâmetro tal que $\beta = \alpha \circ \lambda$. O comprimento de arco, $c(\beta)$, de β em $[c, d]$ é igual a

$$c(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\lambda'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\| |\lambda'(t)| dt.$$

Se $\lambda'(t) > 0$ para qualquer t , temos

$$c(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\|\lambda'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha),$$

fazendo a mudança de variável $u = \lambda(t)$. Caso contrário, se $\lambda'(t) < 0$ para qualquer t , temos

$$c(\beta) = - \int_c^d \|\alpha'(\lambda(t))\|\lambda'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha).$$

■

Como já observámos, o estudo de uma curva simplifica-se quando ela é parametrizada por comprimento de arco. Será portanto importante conhecer que curvas admitem reparametrizações por comprimento de arco.

Definição. Um ponto $\gamma(t)$ de uma curva γ é um *ponto regular* se $\gamma'(t) \neq 0$; senão diz-se ponto singular de γ . Uma curva é *regular* se todos os seus pontos são regulares.

Antes de mostrarmos a relação entre regularidade de uma curva e existência de reparametrizações por comprimento de arco dessa curva, notemos uma propriedade simples das curvas regulares.

Proposição 2.9. *Qualquer reparametrização de uma curva regular é regular.*

Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \lambda$ uma reparametrização de uma curva regular γ . Derivando ambos os membros daquela igualdade obtemos $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Como λ' nunca se anula, está provado. ■

Teorema 2.10. *Uma curva possui uma reparametrização por comprimento de arco se e só se é regular.*

Demonstração: Em primeiro lugar, suponhamos que uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ possui uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ para alguma mudança de parâmetro $\lambda : I \rightarrow J$. Daqui segue que, para qualquer $t \in I$, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Logo $\gamma'(t)$ nunca se anula (pois $\tilde{\gamma}$, estando parametrizada por comprimento de arco, satisfaz $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ para qualquer $t \in J$, e λ é uma mudança de parâmetro).

Reciprocamente, seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e seja $t_0 \in I$. Definamos $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Trata-se de uma função diferenciável:

$$\begin{aligned} s' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|\gamma'(t)\|. \end{aligned}$$

Como γ é suave, é evidente que s' é suave. Portanto s é suave. A regularidade de γ implica $s' > 0$. Logo s é crescente e, portanto, é injectiva. Designemos por J a sua imagem $s(I)$. Obtemos deste modo uma bijecção $s : I \rightarrow J$ que é uma função suave. Uma vez que s' nunca se anula, podemos concluir pela Observação 2.7(d), que $s^{-1} : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro. Finalmente a composição $\gamma \circ s^{-1}$ é uma reparametrização de γ por comprimento de arco. De facto:

$$\begin{aligned} \|(\gamma \circ s^{-1})'(t)\| &= \|(s^{-1})'(t)\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= |(s^{-1})'(t)| \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \left| \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \right| \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.11. Para a espiral logarítmica $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, vimos no Exemplo 2.4 que $\|\gamma'(t)\|^2 = 2e^{2t}$. Este número nunca é zero, pelo que γ é regular. Vimos também que o comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (1, 0)$ é dado por $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$. Então $t = \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$ e

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) \right)$$

dá-nos uma reparametrização por comprimento de arco de γ .

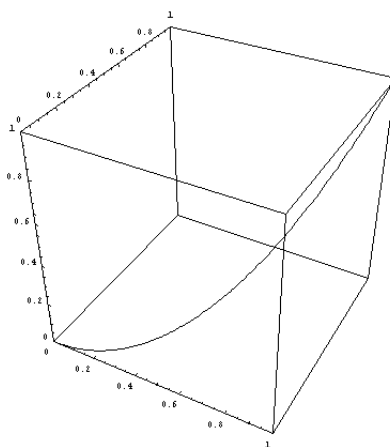
Embora qualquer curva regular, como acabámos de ver, possua uma reparametrização por comprimento de arco, pode ser muito complicado, ou mesmo impossível, determinar explicitamente essa reparametrização. Com efeito, dois tipos de obstáculos se nos poderão deparar:

(1) Em primeiro lugar, pode não ser possível exprimir o integral

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

em termos de funções familiares como logaritmos e exponenciais, funções trigonométricas, etc. Por exemplo, se γ é a elipse dada por $\gamma(t) = (2 \sin t, \cos t)$ então $\|\gamma'(u)\| = \sqrt{4 \cos^2 u + \sin^2 u} = 2\sqrt{1 - 3/4 \sin^2 u}$. Como $\sqrt{1 - 3/4 \sin^2 u}$ não possui primitiva imediata, o integral $\int_0^t \|\gamma'(u)\| du$ não pode ser calculado directamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral. (É um exemplo de *integral elíptico*.)

Um outro exemplo deste tipo é a curva dada por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $-\infty < t < \infty$.



Temos $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Como $\gamma'(t)$ nunca se anula, γ é regular. O comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ é

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du,$$

um outro exemplo de integral elíptico.

(2) Em segundo lugar, mesmo que se consiga determinar $s(t)$, poderá não ser possível encontrar a função inversa $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$. Esse é o caso, por exemplo, se γ é dada por

$\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Com efeito, $\gamma'(t) = (1, t)$ e, conseqüentemente,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})).$$

Note-se que γ é uma simples parábola!

A parametrização dada pelo Teorema 2.10 é essencialmente a única reparametrização por comprimento de arco de uma curva regular:

Proposição 2.12. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $\alpha : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ . Então $\beta : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também uma reparametrização por comprimento de arco de γ se e só se $\beta = \alpha \circ \lambda$, para $\lambda : J_2 \rightarrow J_1$ definida por $\lambda(t) = t + c$ ou $\lambda(t) = -t + c$, onde c é uma constante.*

Demonstração: É claro que esta condição é suficiente para que β seja também uma reparametrização por comprimento de arco:

$$\|\beta'(t)\| = |\lambda'(t)| \|\alpha'(\lambda(t))\| = \|\alpha'(\lambda(t))\| = 1.$$

Reciprocamente, se $\beta = \gamma \circ \lambda_2$ e $\alpha = \gamma \circ \lambda_1$ são reparametrizações por comprimento de arco de γ , então $\beta = \gamma \circ \lambda_2 = \alpha \circ \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$. Seja $\lambda = \lambda_1^{-1} \circ \lambda_2$. Temos $\beta'(t) = \lambda'(t)\alpha'(\lambda(t))$ e $\|\beta'(t)\| = |\lambda'(t)| \|\alpha'(\lambda(t))\|$. Mas, para qualquer $t \in J_2$, $\|\beta'(t)\| = 1 = \|\alpha'(\lambda(t))\|$, donde $|\lambda'(t)| = 1$. Conseqüentemente, $\lambda'(t) = 1$ ou $\lambda'(t) = -1$. Pelo Teorema do Valor Intermédio podemos afirmar mais: ou $\lambda'(t) = 1$ para qualquer $t \in J_2$ ou $\lambda'(t) = -1$ para qualquer $t \in J_2$. Portanto $\lambda(t) = t + c$ para qualquer $t \in J_2$ ou $\lambda(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J_2$. ■

Observemos, por fim, que uma dada curva de nível pode ter parametrizações regulares e não regulares. Por exemplo, a parametrização $\gamma(t) = (t, t^2)$ da parábola $y = x^2$ é regular, mas a parametrização $\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$ já não é regular pois $\tilde{\gamma}'(0) = 0$.

A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra “curva” estaremos a referir-nos a curvas regulares.

Exercícios

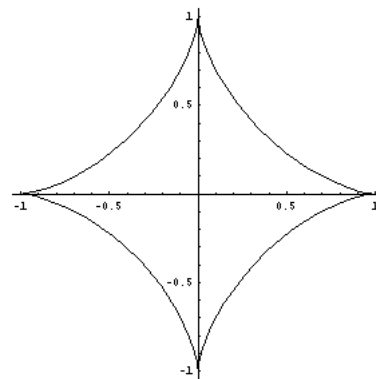
2.1 Determine parametrizações $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ das seguintes curvas de nível:

- (a) Parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
- (b) Circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- (c) Hipérbole $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1, y > 0\}$.
- (d) Elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.

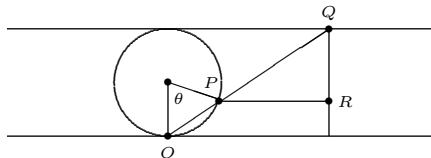
2.2 Será que $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ é uma parametrização da parábola $y = x^2$?

2.3 Determine as equações cartesianas dos traços $\gamma(\mathbb{R})$ das curvas planas definidas pelas seguintes parametrizações:

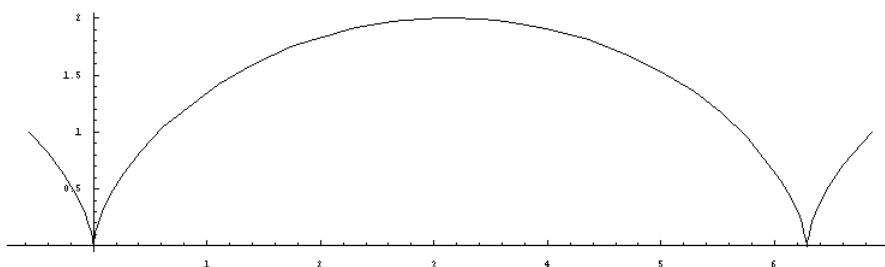
- (a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$.
 (b) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$.
 (c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ (*astróide*, na figura ao lado)



- 2.4 Seja P um ponto de uma circunferência C (no plano XOY) de raio $a > 0$ e centro $(0, a)$ e seja Q o ponto de intersecção da recta $y = 2a$ com a recta que passa pela origem e por P . Seja ainda R o ponto de intersecção da recta horizontal que passa por P com a recta vertical que passa por Q . À medida que P se move ao longo de C , R descreve uma curva chamada *curva de Agnesi*. Determine uma parametrização desta curva e a respectiva equação cartesiana.

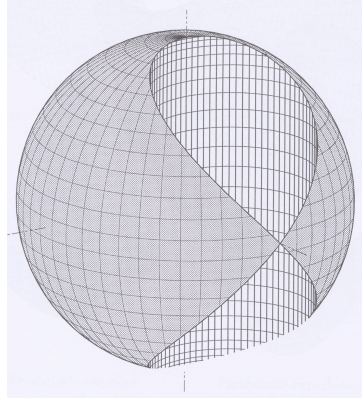


- 2.5 Considere um disco a rodar (sem escorregar) numa superfície plana, ao longo de uma linha recta. Chama-se *ciclóide* à curva plana descrita por um ponto nesse disco.



Mostre que, se a linha recta for o eixo OX e o disco tiver raio $a > 0$, a ciclóide pode ser parametrizada por $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

- 2.6 Generalize o exercício anterior, determinando uma parametrização da *epiciclóide* (resp. *hipociclóide*), isto é, da curva plana descrita por um ponto de um disco, quando este roda, sem escorregar, pela parte externa (resp. interna) do disco.
- 2.7 Mostre que $\gamma(t) = (\cos^2 t - 1/2, \sin t \cos t, \sin t)$ é uma parametrização da curva de intersecção do cilindro circular, de raio $1/2$ e eixo OZ , com a esfera de raio 1 e centro $(-1/2, 0, 0)$ (chamada *curva de Viviani*).



2.8 Calcule os vectores tangentes das curvas do Exercício 2.3. Em que pontos é que o vector tangente ao astróide se anula? Identifique-os na figura.

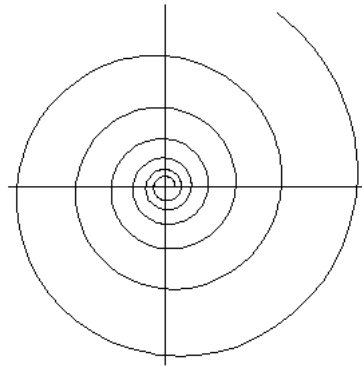
2.9 Determine as rectas tangentes às curvas dadas nos pontos indicados:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2)), t = \pi$.

(b) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (e^{-t}, t^2, 5 + t), t = 0$.

2.10 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, t)$. Prove que o traço de γ está contido num cilindro elíptico. Determine a velocidade de γ no ponto que está no plano $z = 0$.

2.11 Considere a *espiral logarítmica* $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.



Mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vector tangente em $\gamma(t)$ não depende de t .

2.12 Calcule o comprimento de arco da espiral logarítmica, a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$.

2.13 Calcule o comprimento de arco da *catenária* $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, a partir do ponto $(0, 1)$.

2.14 Mostre que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco:

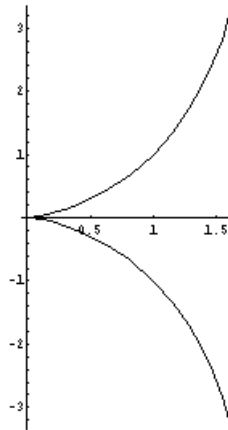
(a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$.

(b) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$.

2.15 Determine o comprimento de arco do cicloide (Exercício 2.5) correspondente a uma revolução completa da circunferência.

2.16 Seja $\lambda : J \rightarrow I$ uma bijecção suave. Mostre que se λ' nunca se anula em J então λ^{-1} é também suave.

- 2.17 Seja $\lambda : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ definida por $\lambda(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$. Prove que λ é uma mudança de parâmetro.
- 2.18 Seja $\lambda : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ dada por $\lambda(t) = \tan(\frac{\pi}{2}t)$. Mostre que λ é uma mudança de parâmetro.
- 2.19 Prove que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma a que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.
- 2.20 Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (t, \sin t, e^t)$. Prove que $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (\ln t, \sin(\ln t), t)$ é uma reparametrização de α .
- 2.21 A *cissóide de Diocles* é a curva cuja equação em termos de coordenadas polares (r, θ) é $r = \sin \theta \tan \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$).



Escreva uma parametrização da cissóide usando θ como parâmetro e mostre que $\gamma(t) = (t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}})$ ($-1 < t < 1$) é uma sua reparametrização.

- 2.22 Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$. Determine os valores de a e b para os quais $\gamma_{a,b}$ é regular.
- 2.23 Considere as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\beta(t) = (t^3, t^6)$, respectivamente. Prove que α e β têm o mesmo traço mas α é regular e β não o é.
- 2.24 Quais das seguintes curvas são regulares?
- $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.
 - Curva da alínea anterior, mas com $t \in (0, \pi/2)$.
 - $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ para $t \in (-\infty, \infty)$.

Determine reparametrizações por comprimento de arco das que são regulares.

- 2.25 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.
- Reparametrize γ por c. a.
 - Calcule o comprimento de arco de γ em $[0, \pi]$.
- 2.26 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco. Prove que:
- O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ são paralelas.
 - O traço de γ está contido numa recta sse todas as rectas tangentes a γ passam por um mesmo ponto fixo.

- 2.27 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que γ tem velocidade constante se e só se os vectores $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ são ortogonais, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.
- 2.28 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular para a qual existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) - a$ e $\gamma'(t)$ são ortogonais. Mostre que γ é uma curva esférica.
- 2.29 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de γ com mudança de parâmetro λ (portanto $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\lambda(\tilde{t}))$). Seja $\tilde{t}_0 \in J$ e $t_0 = \lambda(\tilde{t}_0)$. Sendo s e \tilde{s} os comprimentos de arco de γ e $\tilde{\gamma}$ a partir do ponto $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(\tilde{t}_0)$, prove que $\tilde{s} = s$ se $\lambda'(\tilde{t}) > 0$ para qualquer $\tilde{t} \in J$, e que $\tilde{s} = -s$ se $\lambda'(\tilde{t}) < 0$ para qualquer $\tilde{t} \in J$.
- 2.30 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\|\gamma'(t)\| = a$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Prove que se α é uma reparametrização por comprimento de arco de γ então existe uma constante real c tal que $\alpha(t) = \gamma(t/a + c)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ ou $\alpha(t) = \gamma(-t/a + c)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

3. Quanto é que uma curva curva?

Curvatura e torsão; triedro de Frenet-Serret

Nesta secção associamos a cada curva duas funções escalares, chamadas curvatura e torsão. A curvatura mede quanto é que a curva se afasta de estar contida numa recta (portanto, linhas rectas têm curvatura zero), e a torsão mede quanto é que a curva se afasta de estar contida num plano (portanto, curvas planas têm torsão zero). Acontece que a curvatura e a torsão determinam completamente a forma da curva, como veremos mais tarde.

Começemos por procurar uma medida da “curvatura” de uma curva, que meça em cada ponto o afastamento da curva relativamente à tangente à curva nesse ponto. Como esta “curvatura” só deverá depender do traço da curva,

- (1) deverá ser inalterável por mudança de parâmetro (quando a curva é reparametrizada).

Além disso, deverá estar de acordo com a nossa intuição em casos especiais simples. Por exemplo:

- (2) a curvatura de uma linha recta deverá ser zero;
- (3) a curvatura de uma circunferência deverá ser constante, tanto maior quanto menor for o seu raio.

Com tudo isto em mente, encontramos a sugestão para a definição de curvatura na Proposição 2.3: se γ é uma curva com $\gamma''(t) = 0$ em cada t então o traço de γ é parte de uma linha recta e, por (2), deverá ter curvatura zero. Somos assim tentados a definir curvatura de γ no ponto $\gamma(t)$ como $\|\gamma''(t)\|$ (tomamos a norma porque queremos que a curvatura seja uma medida, ou seja, um escalar). Infelizmente, isto depende da parametrização de γ , contrariando (1). Temos assim, para não contrariar (1), que começar por nos restringirmos às curvas parametrizadas por comprimento de arco.

Definição 3.1. Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Chama-se *curvatura* de γ no ponto $\gamma(s)$, e denota-se por $\kappa(s)$, ao número $\|\gamma''(s)\|$.

Confirmemos que esta noção satisfaz as condições (1), (2) e (3):

- (1) A recta que passa por um dado ponto $w \in \mathbb{R}^3$ e tem a direcção do vector $v \in \mathbb{R}^3$ ($\|v\| = 1$) tem uma parametrização por comprimento de arco dada por $\gamma(s) = sv + w$. É claro que $\kappa(s) = 0$ para qualquer s .
- (2) Quanto à circunferência de raio $r > 0$, $\gamma(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$ é uma parametrização por comprimento de arco. Como

$$\gamma'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$$

e

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right),$$

obtemos

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}\right)^2} = \frac{1}{r}, \quad (3.1.1)$$

pelo que a curvatura da circunferência é inversamente proporcional ao seu raio.

- (3) Sejam $\tilde{\gamma}_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\gamma}_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas reparametrizações por comprimento de arco de uma curva γ . Pela Proposição 2.12 sabemos que $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1 \circ \lambda_c$, onde $\lambda_c(t) = t + c$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda_c(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J$. Então $\tilde{\gamma}'_2(t) = \tilde{\gamma}'_1(\lambda_c(t))\lambda'_c(t)$. Como $\lambda''_c(t) = 0$ para qualquer t , obtemos

$$\tilde{\gamma}''_2(t) = \tilde{\gamma}''_1(\lambda_c(t))\lambda'_c(t)^2 = \tilde{\gamma}''_1(\lambda_c(t)).$$

Consequentemente,

$$\kappa_{\tilde{\gamma}_2}(t) = \|\tilde{\gamma}''_2(t)\| = \|\tilde{\gamma}''_1(s)\| = \kappa_{\tilde{\gamma}_1}(s)$$

onde $s = \lambda_c(t) \in I$.

E no caso geral, como devemos definir (e calcular) a curvatura de γ ? Se γ é regular, sabemos existir, pelo Teorema 2.10, uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Então, para garantir a propriedade (1), bastará definir a *curvatura* de γ como sendo a curvatura da reparametrização $\tilde{\gamma}$ (ou de qualquer outra reparametrização por comprimento de arco). Portanto

$$\kappa_\gamma(t) := \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$

sendo λ a mudança de parâmetro correspondente. Como nem sempre é possível determinar explicitamente a reparametrização $\tilde{\gamma}$, necessitamos de uma fórmula para a curvatura em termos de γ e t somente.

Proposição 3.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva (regular). Então, para cada $t \in I$,*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ , com mudança de parâmetro $\lambda : I \rightarrow J$. De $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ obtemos, por derivação, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$ e $\gamma''(t) = \lambda''(t)\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\tilde{\gamma}''(\lambda(t))$. Então

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3 \left(\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) \wedge \tilde{\gamma}''(\lambda(t)) \right)$$

e, consequentemente,

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = |\lambda'(t)|^3 \|\tilde{\gamma}'(\lambda(t))\| \|\tilde{\gamma}''(\lambda(t))\|,$$

pois, pela Proposição 2.5, $\tilde{\gamma}'(\lambda(t))$ e $\tilde{\gamma}''(\lambda(t))$ são ortogonais. Mas $|\lambda'(t)| = \|\gamma'(t)\|$, $\|\tilde{\gamma}'(\lambda(t))\| = 1$ e $\|\tilde{\gamma}''(\lambda(t))\| = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \kappa_\gamma(t)$, pelo que

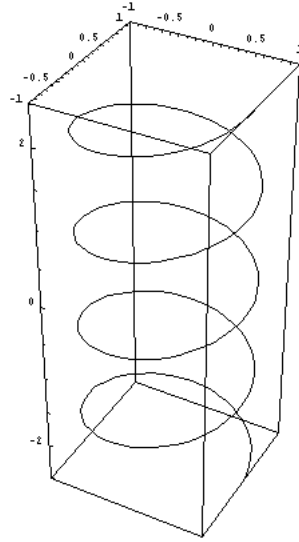
$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

■

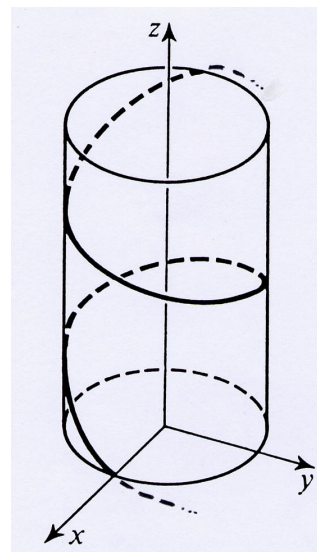
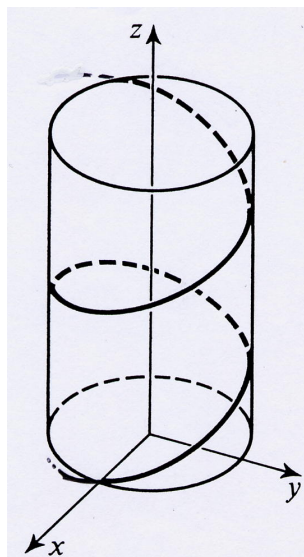
Exemplo 3.3. Consideremos a *hélice circular* de eixo vertical, definida por

$$\gamma_{r,a}(t) = (r \cos t, r \sin t, at), \quad (-\infty < t < \infty)$$

onde r e a são constantes reais.



Se (x, y, z) é um ponto no traço da hélice, então $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ e $z = at$ para algum $t \in \mathbb{R}$, logo $x^2 + y^2 = r^2$, mostrando que o traço da hélice está contido no cilindro vertical (eixo OZ) e raio $|r|$. O número positivo $|r|$ diz-se o *raio* da hélice. À medida que t cresce 2π unidades, o ponto $(r \cos t, r \sin t, at)$ efectua uma rotação em torno do eixo OZ e move-se na vertical, $2\pi a$ unidades; o número positivo $2\pi|a|$ chama-se *passo* da hélice circular (tomamos os valores absolutos pois não assumimos r e a positivos). As figuras seguintes mostram o traço da hélice circular, respectivamente no caso $a, r > 0$ e no caso $a < 0, r > 0$:



Reparametrizando $\gamma_{r,a}$ por comprimento de arco (Exercício 3.5) obtemos

$$\tilde{\gamma}_{r,a}(s) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}, a \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right),$$

donde segue

$$\kappa(s) = \|\tilde{\gamma}_{r,a}''(s)\| = \frac{|r|}{r^2 + a^2}.$$

Portanto, a curvatura da hélice circular $\gamma_{r,a}$ é constante, diminuindo com o crescimento em valor absoluto de r ou de a .

Alternativamente, podíamos ter calculado a curvatura de $\gamma_{r,a}$ usando a fórmula da Proposição 3.2, evitando com isso a determinação da reparametrização por comprimento de arco. Como $\gamma'_{r,a}(t) = (-r \sin t, r \cos t, a)$, $\gamma''_{r,a}(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$ e $\gamma'_{r,a}(t) \wedge \gamma''_{r,a}(t) = (ra \sin t, -ra \cos t, r^2)$, obtemos

$$\kappa(t) = \frac{\|(ra \sin t, -ra \cos t, r^2)\|}{\|(-r \sin t, r \cos t, a)\|^3} = \frac{(r^2 a^2 + r^4)^{1/2}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{|r|}{r^2 + a^2}. \quad (3.3.1)$$

No caso limite $a = 0$ (com $r \neq 0$), a hélice circular é simplesmente uma circunferência no plano horizontal XOY , de raio $|r|$, pelo que, por (3.1.1), a sua curvatura é $1/|r|$. Por outro lado, a fórmula (3.3.1) dá-nos também, como não podia deixar de ser, $|r|/r^2 = 1/|r|$. No outro caso limite $r = 0$ (com $a \neq 0$), o traço da hélice é uma linha recta (o eixo OZ), pelo que a sua curvatura é 0 (e (3.3.1) dá-nos isso quando $r = 0$).

Observámos (página 23) que a curvatura de uma recta é constantemente nula. A Proposição 2.3 diz-nos que o recíproco também é verdadeiro (pois $\kappa(s) = 0$ para qualquer s implica que o vector $\gamma'(s)$ seja constante). Determinamos assim o significado geométrico da curvatura ser nula:

um segmento (troço) de uma curva tem curvatura nula se e só se está contido numa recta.

Dada uma curva qualquer, podemos sempre particioná-la em segmentos, de tal modo que a curvatura se anula em todos os pontos de alguns desses segmentos e, nos restantes, só se anula eventualmente nos extremos. Nos primeiros segmentos já conhecemos a geometria da curva: segmentos de recta, semi-rectas ou rectas. Portanto só nos precisamos de preocupar em estudar os outros, onde a curvatura nunca se anula a não ser, eventualmente, nos pontos extremos.

Por esta razão, daqui em diante assumiremos que a curvatura κ nunca se anula.

Refira-se somente que nos pontos extremos (isolados) onde κ se anula (chamados *pontos de inflexão*) podem acontecer muitas coisas estranhas. Por exemplo, a curva (regular e suave) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

tem curvatura nula em $t = 0$, o seu traço de $-\infty$ a 0 está contido num plano e o seu traço de 0 a $+\infty$ está contido noutro plano.

O exemplo da hélice circular acima mostra-nos que a curvatura não é suficiente para identificarmos completamente a forma de uma curva (isso só acontecerá para as curvas planas, como veremos). Com efeito, quer a circunferência de raio 1 no plano XOY quer a hélice circular de parâmetros $r = a = 1/2$ têm curvatura constante igual a 1, e são manifestamente curvas muito diferentes na sua forma (mais precisamente, é impossível levar uma até a outra por rotação e translação). Introduziremos então um outro tipo de curvatura para curvas não planas, chamada *torsão*, que medirá a variação do plano “osculador” da curva — ou, dito de outro modo, o quanto uma curva se afasta de ser plana.

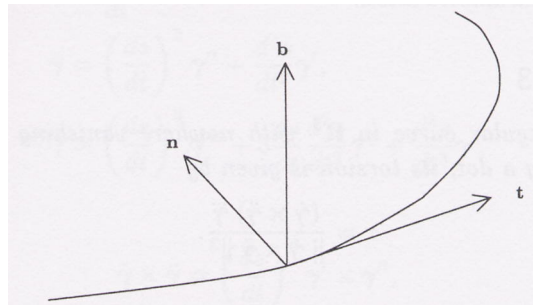
Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $T(s) = \gamma'(s)$ o seu vector tangente no ponto $\gamma(s)$. Se a curvatura $\kappa(s)$ não for nula, podemos definir o vector *normal principal* de γ no ponto $\gamma(s)$ como sendo o vector

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s). \quad (3.3.2)$$

$N(s)$ é um vector unitário (pois $\|T'(s)\| = \kappa(s)$), ortogonal a $T(s)$, pela Proposição 2.5. Consequentemente,

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad (3.3.3)$$

é um vector unitário perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$. Este vector chama-se *binormal* de γ no ponto $\gamma(s)$. Em conclusão, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 ,



com orientação positiva (mesma orientação que a base canónica), isto é,

$$T(s) = N(s) \wedge B(s), \quad N(s) = B(s) \wedge T(s), \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Em cada ponto $\gamma(s)$ temos três rectas e três planos especiais:

- *recta tangente*, paralela a $T(s)$;
- *recta normal principal*, paralela a $N(s)$;
- *recta binormal*, paralela a $B(s)$;
- *plano osculador*, paralelo a $T(s)$ e $N(s)$;

- *plano normal*, paralelo a $N(s)$ e $B(s)$;
- *plano rectificante*, paralelo a $T(s)$ e $B(s)$.

Como $B(s)$ é um vector unitário, $B'(s)$ é perpendicular a $B(s)$. Recordemos a regra de derivação para o produto vectorial de funções vectoriais F e G de parâmetro s :

$$(F \wedge G)'(s) = F'(s) \wedge G(s) + F(s) \wedge G'(s).$$

Aplicando-a a $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ obtemos

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s), \quad (3.3.4)$$

pois pela definição de $N(s)$, $T'(s) \wedge N(s) = \kappa(s)N(s) \wedge N(s) = 0$. A equação (3.3.4) mostra que $B'(s)$ também é perpendicular a $T(s)$. Então $B'(s)$ é necessariamente paralelo a $N(s)$, pelo que

$$B'(s) = -\tau(s)N(s), \quad (3.3.5)$$

para algum escalar $\tau(s)$, a que se chama *torsão* de γ no ponto $\gamma(s)$ (o sinal $-$ é simplesmente uma questão de convenção). Note que a torsão só está definida caso a curvatura seja não nula, e que, ao contrário da curvatura, pode assumir valores negativos.

Como no caso da curvatura, definimos torsão de uma curva regular arbitrária γ como sendo a torsão de uma sua reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Portanto

$$\tau_\gamma(t) := \tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$

sendo λ a mudança de parâmetro correspondente.

Para que esta definição faça sentido (não seja ambígua), temos que garantir que sendo $\tilde{\gamma}_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\gamma}_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas reparametrizações por comprimento de arco da curva γ , a torsão calculada em $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ dá o mesmo resultado. Como $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1 \circ \lambda_c$, onde $\lambda_c(t) = t + c$ para qualquer $t \in J$ ou $\lambda_c(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J$, a mudança de parâmetro $t \mapsto s = \lambda_c(t)$ tem o seguinte efeito nos vectores introduzidos acima:

$$T_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \pm T_{\tilde{\gamma}_2}, \quad T'_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto T'_{\tilde{\gamma}_2}, \quad N_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto N_{\tilde{\gamma}_2}, \quad B_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \pm B_{\tilde{\gamma}_2}, \quad B'_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto B'_{\tilde{\gamma}_2}.$$

Consequentemente, $\tau_{\tilde{\gamma}_1} \mapsto \tau_{\tilde{\gamma}_2}$, pela equação (3.3.5), ou seja, $\tau_{\tilde{\gamma}_2}(t) = \tau_{\tilde{\gamma}_1}(s)$.

Tal como fizemos para a curvatura, é possível dar uma fórmula para a torsão, unicamente em termos de γ , sem requerer o conhecimento de uma reparametrização por comprimento de arco:

Proposição 3.4. *Seja γ uma curva (regular, cuja curvatura nunca se anula). Então*

$$\tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Demonstração: Seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ , com mudança de parâmetro $\lambda : I \rightarrow J$. Vimos na demonstração da Proposição 3.2 que

$$\gamma''(t) = \lambda''(t)\tilde{\gamma}'(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\tilde{\gamma}''(\lambda(t)) = \lambda''(t)T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^2\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)),$$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) (T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \wedge N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$$

e

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2 = \lambda'(t)^6 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))^2.$$

Então

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= \lambda'''(t)T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda''(t)\lambda'(t)T'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + 2\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \\ &\quad \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \\ &= \lambda'''(t)T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + 2\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \\ &\quad \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \left[-\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \right. \\ &\quad \left. \tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \right] \\ &= [\lambda'''(t) - \lambda'(t)^3\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))]T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \\ &\quad [3\lambda'(t)\lambda''(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \lambda'(t)^3\kappa'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))]N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) + \\ &\quad [\lambda'(t)^3\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))\tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))]B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)). \end{aligned}$$

e

$$[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = \lambda'(t)^6 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))^2 \tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

Portanto,

$$\frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \tau_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \tau_{\gamma}(t).$$

■

Exemplo. Consideremos novamente a hélice circular $\gamma_{r,a}$ dada por $\gamma_{r,a}(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$. Neste caso (recorde o Exemplo 3.3)

$$\gamma'_{r,a}(t) \wedge \gamma''_{r,a}(t) = (ra \sin t, -ra \cos t, r^2) \quad \text{e} \quad \|\gamma'_{r,a}(t) \wedge \gamma''_{r,a}(t)\|^2 = r^2(r^2 + a^2).$$

Como $\gamma'''_{r,a}(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0)$, então $[\gamma'_{r,a}(t), \gamma''_{r,a}(t), \gamma'''_{r,a}(t)] = r^2 a$ e

$$\tau(t) = \frac{r^2 a}{r^2(r^2 + a^2)} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Note que, neste caso, a torsão também é constante, como a curvatura.

Proposição 3.5. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva cuja curvatura nunca se anula. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) γ é plana (ou seja, o traço de γ está contido num plano);
- (ii) para cada $t \in I$, $\tau(t) = 0$.

Demonstração: Como para qualquer reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$ de γ se tem

- γ é plana se e só se $\tilde{\gamma}$ é plana
- $\tau_\gamma = \tau_{\tilde{\gamma}}$

então o resultado será válido para uma curva geral γ se e só se é válido para qualquer sua reparametrização por comprimento de arco. Bastará então provar o resultado para curvas parametrizadas por comprimento de arco.

(i) \Rightarrow (ii): Seja P o plano a que pertence o traço da curva γ . Consideremos um ponto p_0 desse plano e um vector unitário a perpendicular a esse plano. Então

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid (p - p_0|a) = 0\}$$

e a condição $\gamma(I) \subseteq P$ traduz-se em

$$\forall s \in I, (\gamma(s) - p_0|a) = 0.$$

Derivando sucessivamente obtemos

$$(T(s)|a) = 0 \text{ e } \kappa(s)(N(s)|a) = 0$$

para qualquer $s \in I$. Isto significa que a é perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$, para qualquer $s \in I$. Portanto a é paralelo ao vector binormal $B(s)$ em cada $s \in I$, ou seja, $B(s) = \lambda(s)a$ para algum escalar real $\lambda(s)$. Como $\|a\| = 1$ e $\|B(s)\| = 1$, temos $|\lambda(s)| = 1$. Em conclusão $B(s) = a$ ou $B(s) = -a$ para cada $s \in I$. Mas a função $B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $s \mapsto B(s)$ é suave, logo $B(s) = a$ para qualquer $s \in I$ ou $B(s) = -a$ para qualquer $s \in I$. Em ambos os casos a função B é constante pelo que, por (3.3.5), $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in I$.

(ii) \Rightarrow (i): Por (3.3.5) a função binormal é constante, igual em cada s a um dado vector B . A implicação contrária sugere que $\gamma(I)$ está contido num plano perpendicular a B . Fixando $s_0 \in I$, terá que passar pelo ponto $\gamma(s_0)$. Verifiquemos então que $\gamma(I)$ está contido no plano $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid (p - \gamma(s_0)|B) = 0\}$, ou seja, $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$ para qualquer $s \in I$. Como $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)' = (T(s)|B) = (T(s)|B(s)) = 0$ para qualquer $s \in I$, a função $s \mapsto (\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)$ é constante. Por outro lado, em s_0 toma o valor $(\gamma(s_0) - \gamma(s_0)|B) = 0$. Portanto $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$ para qualquer $s \in I$. ■

Ficamos assim a conhecer o significado geométrico da torsão ser nula:

a curva está contida num plano (que é o plano osculador da curva em qualquer ponto, como a demonstração nos mostra).

Mais geralmente, para uma curva geral γ , o plano osculador em cada ponto $\gamma(t)$ é o plano à qual γ , na vizinhança de $\gamma(t)$, está “mais próximo” de pertencer.

Há uma lacuna nos cálculos que efectuámos até agora que queremos preencher: já sabemos que, para curvas parametrizadas por comprimento de arco, $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ e $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Como se calcula $N'(s)$?

Da igualdade $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ decorre, por diferenciação,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s) \wedge T(s) + \kappa(s)B(s) \wedge N(s) \\ &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Em conclusão:

Teorema 3.6. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Então, para cada $s \in I$, temos:*

- (1) $T'(s) = \kappa(s)N(s)$;
- (2) $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$;
- (3) $B'(s) = -\tau(s)N(s)$.

■

As equações (1)-(3) chamam-se *equações de Frenet-Serret*. Note que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

que exprime T' , N' e B' em termos dos vectores da base T , N e B é *anti-simétrica*, isto é, é igual à negativa da sua transposta. Isto ajuda a memorizar as equações.

Já vimos como podemos determinar a curvatura e a torsão de qualquer curva γ sem precisarmos de determinar uma sua reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$. Como será para o triedro de Frenet-Serret?

Proposição 3.7.

- (1) $T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \pm \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.
- (2) $B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \pm \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}$.

(Onde o sinal $+$ é tomado se a respectiva mudança de parâmetro λ preserva a orientação; caso contrário toma-se o sinal $-$.)

Demonstração: (1) De $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \lambda$ decorre, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t))\lambda'(t)$. Consequentemente, como $\|\gamma'(t)\| = |\lambda'(t)|$, temos

$$T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = \tilde{\gamma}'(\lambda(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\lambda'(t)} = \pm \frac{\gamma'(t)}{|\lambda'(t)|} = \pm \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

(2) Já vimos na demonstração da Proposição 3.4 que

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \lambda'(t)^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

Portanto $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = |\lambda'(t)|^3 \kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$ e

$$\frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} = \pm B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

■

Observação. O vector $N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$ calcula-se através do produto vectorial $B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) \wedge T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. Define-se

$$T_{\gamma}(t) = T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))$$

para cada $t \in I$, onde $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização por comprimento de arco cuja mudança de parâmetro preserva a orientação. Analogamente, definem-se

$$N_{\gamma}(t) = N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)), \quad B_{\gamma}(t) = B_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)).$$

Neste caso geral, como se calculam as derivadas T' , N' e B' ?

$$T'_{\gamma}(t) = \lambda'(t)T'_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = v_{\gamma}(t)\kappa_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))N_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t)) = v_{\gamma}(t)\kappa_{\gamma}(t)N_{\gamma}(t),$$

onde $v_{\gamma}(t) = \|\gamma'(t)\| = |\lambda'(t)| = \lambda'(t)$ é a *velocidade* de γ no ponto $\gamma(t)$.

Analogamente,

$$N'_{\gamma}(t) = -v_{\gamma}(t)\kappa_{\gamma}(t)T_{\gamma}(t) + v_{\gamma}(t)\tau_{\gamma}(t)B_{\gamma}(t)$$

e

$$B'_{\gamma}(t) = -v_{\gamma}(t)\tau_{\gamma}(t)N_{\gamma}(t).$$

Em resumo, no caso geral as fórmulas de Frenet-Serret têm a forma

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = v_{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Vejamos uma aplicação simples das fórmulas de Frenet-Serret:

Proposição 3.8. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva com torsão nula e curvatura constante κ . Então o traço de γ está contido numa circunferência de raio $1/\kappa$.*

Demonstração: Pela demonstração da Proposição 3.5, o vector binormal B é constante e o traço de γ está contido num plano perpendicular a B . Consideremos os pontos $p(t) = \gamma(t) + (1/\kappa)N(t)$. Como $p'(t) = v(t)T(t) + (1/\kappa)N'(t) = v(t)T(t) - v(t)T(t) = 0$ (pela segunda fórmula de Frenet-Serret), $p(t)$ é constante, digamos $p(t) = p_0$ para qualquer $t \in I$. Além disso, para cada $t \in I$, $\|\gamma(t) - p_0\| = \|(1/\kappa)N(t)\| = 1/\kappa$, o que mostra que todos os pontos da curva γ estão contidos na circunferência de centro p_0 e raio $1/\kappa$. ■

Exercícios

3.1 Determine as curvaturas das seguintes curvas:

$$(a) \gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad (b) \gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

$$(c) \gamma(t) = (t, \cosh t) \quad (d) \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

No caso do astróide em (d), mostre que a curvatura tende para ∞ à medida que nos aproximamos dos pontos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Compare com a figura do Exercício 2.3.

3.2 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva (regular) parametrizada por comprimento de arco, esférica. Prove que a curvatura de γ nunca se anula.

3.3 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Prove que

$$\kappa_\gamma(s) = |\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)|,$$

onde γ_1 e γ_2 denotam as funções componente de γ .

3.4 Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $\alpha(t) = (t, p + qt + rt^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, a + be^{ct}, d)$, em que p, q, r, a, b, c e d são constantes. Estabeleça uma condição necessária e suficiente, envolvendo as constantes, para que $\kappa_\alpha(0) = \kappa_\beta(0)$.

3.5 Considere a *hélice circular* $\gamma_{r,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma_{r,a}(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$, r constante positiva e a constante não nula. Calcule a curvatura e a torsão de qualquer reparametrização por comprimento de arco de $\gamma_{r,a}$.

3.6 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula e $\beta = \alpha \circ \lambda$ uma sua reparametrização. Prove que

$$\tau_\alpha(\lambda(t)) = [\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)] / \|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2.$$

3.7 Calcule a curvatura e a torsão da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

3.8 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Mostre que $\kappa = \tau$.

3.9 Prove que as seguintes curvas estão parametrizadas por comprimento de arco e calcule o seu triedro de Frenet-Serret:

$$(a) \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(s) = \left(\frac{5}{13} \cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13} \cos s \right);$$

$$(b) \gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

3.10 Calcule o triedro de Frenet-Serret das curvas:

$$(a) \gamma(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}. \quad (b) \gamma(t) = (t - \cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}.$$

3.11 Determine τ, T, N, B para as curvas dos Exercícios 3.1 (a) e (b). Verifique que as equações de Frenet-Serret são satisfeitas.

3.12 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa, \tau > 0$. Seja ainda $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tal que $\alpha'(s) = B_\gamma(s)$. Determine o triedro de Frenet-Serret, a curvatura e a torsão de α .

3.13 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\gamma(t) = (te^{-t}, (t+1)e^{-t})$. Verifique se alguma das rectas tangentes de γ passa pelo ponto $(0, 0)$.

3.14 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1+t, -t^2, 1+t^3)$. Determine a recta tangente e o plano normal a γ em cada ponto $\gamma(t)$.

- 3.15 (a) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura é positiva. Prove que se todo o plano normal de γ passa por um ponto fixo então γ é esférica.
- (b) Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (-\cos 2t, -2\cos t, \sin 2t)$. Prove que γ é uma curva esférica, mostrando que todos os planos normais de γ passam pelo ponto $(-1, 0, 0)$.
- 3.16 Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, -t^2/2, 0)$. Determine todos os valores reais t nos quais a recta tangente a α em $\alpha(t)$ e a recta normal a β em $\beta(t)$ têm a mesma direcção.
- 3.17 Determine uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as rectas normais da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, \phi(t))$, a uma constante não nula, sejam paralelas ao plano de equação $z = 0$.
- 3.18 Considere a hélice circular $\gamma_{r,a}$ do Exercício 3.5. Determine:
- (a) A recta binormal em cada ponto $\gamma_{r,a}(t)$;
- (b) O plano rectificante em $\gamma_{r,a}(t)$.
- 3.19 Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas curvas não necessariamente parametrizadas por comprimento de arco e com curvaturas positivas. Diz-se que α e β são *curvas de Bertrand* se, para cada $t \in I$, as rectas normal principal de α em $\alpha(t)$ e normal principal de β em $\beta(t)$ coincidem. Prove que:
- (a) $\|\alpha(t) - \beta(t)\|$ não depende de t ;
- (b) O ângulo formado pelos vectores $T_\alpha(t)$ e $T_\beta(t)$ não depende de t .
- 3.20 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t + 1, 2t^3, -t^2)$.
- (a) Mostre que τ é sempre positiva.
- (b) Dado um ponto da forma $(1, 0, z)$, $z > 0$, prove que existem três pontos da curva onde os planos osculadores de γ passam por aquele ponto.
- 3.21 Considere a curva $\gamma_{a,b,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma_{a,b,c}(t) = (3at, 3bt^2, ct^3)$, onde a, b e c são constantes não nulas. Prove que:
- (a) A equação do plano osculador no ponto $\gamma_{a,b,c}(1)$ é $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;
- (b) A recta tangente a $\gamma_{a,b,c}$ no ponto $\gamma_{a,b,c}(t)$ intersecta o plano da alínea anterior no ponto $(a(2t + 1), bt(t + 2), ct^2)$.
- 3.22 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
- (a) Prove que o ângulo definido pelo vector binormal de γ em $\gamma(t)$ e pelo vector $(0, 0, a)$, $a \neq 0$, é constante.
- (b) Prove que a recta normal principal de γ em $\gamma(t)$ é paralela ao plano de equação $z = 0$ e intersecta o eixo OZ .

4. Curvas planas

Nesta secção veremos que no caso planar é possível refinar a definição de curvatura, de modo a dar-lhe uma interpretação geométrica interessante. Provaremos ainda o Teorema Fundamental, que garante que uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, é determinada essencialmente pela sua curvatura com sinal (“essencialmente” significa “a menos de um movimento rígido de \mathbb{R}^2 ”).

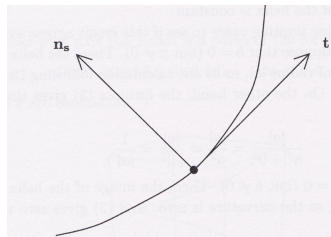
Pela Proposição 3.5, uma curva γ é plana (isto é, o seu traço está contido num plano) se e só se tem torção $\tau = 0$. Neste caso as fórmulas de Frenet-Serret reduzem-se a

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T, \quad B' = 0. \quad (*)$$

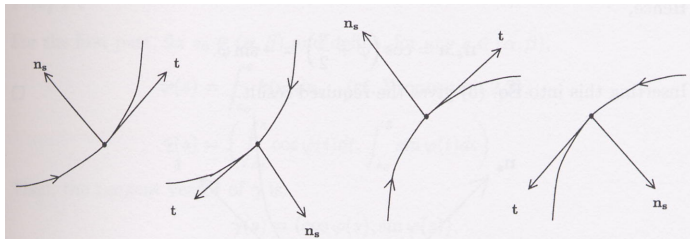
Se escolhermos o sistema de coordenadas de modo a que os eixos OX e OY estejam situados no plano da curva, a terceira componente do vector de posição de cada ponto $\gamma(t)$ é nula e todas as fórmulas se simplificam. Além disso, fixando uma orientação do plano em questão, podemos estabelecer um sentido positivo de rotação no plano. Consequentemente, a medida do ângulo formado por um par ordenado de vectores pode ser expressa por números positivos ou negativos, indicando assim, além do valor absoluto do ângulo de rotação, o sentido de rotação que leva o primeiro vector até ao segundo.

Em qualquer curva plana, o vector tangente e o vector normal principal estão ambos no plano da curva. Por outro lado, o vector binormal é constante e perpendicular ao plano, pelo que pode ser negligenciado e o triedro de Frenet-Serret reduzir-se-à ao par (T, N) .

Suponhamos então que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, e fixemos, para *sentido positivo* de rotação no plano da curva, o sentido oposto ao movimento dos ponteiros do relógio. Usando esta orientação, vamos substituir o vector normal principal $N(s)$ pelo vector unitário colinear $N_s(s)$ tal que o par $(T(s), N_s(s))$ está orientado positivamente (ou seja, $N_s(s)$ obtem-se de $T(s)$ por rotação de um ângulo recto, no sentido positivo):



$N_s(s)$ chama-se *vector normal com sinal* de γ no ponto $\gamma(s)$. Claro que $N_s(s) = \alpha N(s)$ onde α é igual a 1 ou -1 , dependendo da parametrização da curva. A figura seguinte mostra os diferentes casos que podem ocorrer: no primeiro e último casos α é 1 e nos outros dois é -1 (em cada caso, a seta na curva indica a direcção crescente do parâmetro s).



Se $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$, é evidente que:

Proposição 4.1. $T(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s))$ e $N_s(s) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s))$. ■

Mais geralmente (cf. Exercício 4.4), no caso de uma parametrização arbitrária $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, temos

$$T(t) = \left(\frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}}, \frac{\gamma'_2(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}} \right)$$

e

$$N_s(t) = \left(-\frac{\gamma'_2(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}}, \frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}} \right).$$

Pela Proposição 2.5, $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$, logo é paralelo a $N_s(s)$. Portanto, existe um escalar real $\kappa_s(s)$ tal que

$$T'(s) = \kappa_s(s)N_s(s). \quad (4.1.1)$$

O escalar $\kappa_s(s)$ chama-se *curvatura com sinal* de γ no ponto $\gamma(s)$ (pode ser positivo, negativo ou nulo). Note que, como $N_s(s)$ é unitário, $\kappa(s) = \|T'(s)\| = |\kappa_s(s)|$. Portanto κ_s só pode diferir de κ no sinal:

$$\kappa_s(s) = \alpha\kappa(s), \quad (\alpha = \pm 1).$$

O sinal indica em que direcção a curva (ou melhor, a sua tangente) está a rodar. Assim $\kappa_s > 0$ indica que a tangente está a rodar no sentido positivo (primeiro e último casos na figura anterior) enquanto $\kappa_s < 0$ indica que roda no sentido negativo (segundo e terceiro casos da figura).

As fórmulas (*) podem então ser substituídas simplesmente por

$$T' = \kappa_s N_s, \quad N'_s = -\kappa_s T.$$

Note que κ_s (ao contrário de κ) muda de sinal quando a curva é reparametrizada por uma mudança de parâmetro que inverte a orientação.

A curvatura com sinal tem uma interpretação geométrica simples:

Proposição 4.2. *Seja $\theta(s)$ o ângulo que um dado vector fixo tem que rodar no sentido positivo para coincidir com o vector tangente $T(s)$. Então $\kappa_s(s) = \theta'(s)$.*

Demonstração: Seja u tal vector fixo (que podemos assumir unitário) e seja v o vector unitário obtido por rotação, no sentido positivo, de $\pi/2$ radianos. Então

$$T(s) = \cos \theta(s)u + \sin \theta(s)v$$

e

$$T'(s) = (-\sin \theta(s)u + \cos \theta(s)v)\theta'(s).$$

Portanto $(T'(s)|u) = -\sin \theta(s)\theta'(s)$. Por outro lado, pela definição de κ_s , temos $(T'(s)|u) = \kappa_s(s)(N_s(s)|u)$, e como o ângulo entre $N_s(s)$ e u é igual a $\pi/2 + \theta(s)$, $(T'(s)|u) = \kappa_s(s) \cos(\theta(s) + \pi/2) = -\kappa_s(s) \sin \theta(s)$. Em conclusão, $\kappa_s(s) = \theta'(s)$. ■

Podemos agora determinar uma fórmula para o cálculo da curvatura com sinal:

Corolário 4.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$. Então*

$$\kappa_s(s) = \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s).$$

Demonstração: Como $(\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)) = T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, temos $\gamma_1''(s) = -\theta'(s) \sin \theta(s)$ e $\gamma_2''(s) = \theta'(s) \cos \theta(s)$. Consequentemente, pela proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa_s(s) = \theta'(s) &= \begin{vmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ -\theta'(s) \sin \theta(s) & \theta'(s) \cos \theta(s) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \gamma_1'(s) & \gamma_2'(s) \\ \gamma_1''(s) & \gamma_2''(s) \end{vmatrix} \\ &= \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s). \end{aligned}$$

■

É fácil de ver (Exercício 4.4) que, no caso de uma parametrização arbitrária $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, a curvatura com sinal é dada pela fórmula

$$\kappa_s(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2)^{3/2}}.$$

A Proposição 4.2 também nos permite deduzir o Teorema Fundamental das curvas planas, que assegura que uma curva parametrizada por comprimento de arco fica essencialmente determinada a partir do momento em que conhecemos a curvatura com sinal em cada ponto da curva. O significado de “essencialmente” é “a menos de um movimento rígido” de \mathbb{R}^2 . Recordemos que um *movimento rígido* de \mathbb{R}^2 é uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma $\mathcal{M} = \mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_\theta$, onde \mathcal{R}_θ é uma rotação de ângulo θ , em torno da origem, no sentido positivo, e \mathcal{T}_a é a translação definida pelo vector a :

$$\mathcal{R}_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\mathcal{T}_a(v) = v + a.$$

Teorema 4.4. [Teorema fundamental das curvas planas] *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja curvatura com sinal coincide com f .*

E mais: se $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é outra curva parametrizada por comprimento de arco nessas condições, então existe um movimento rígido \mathcal{M} de \mathbb{R}^2 tal que

$$\tilde{\gamma}(s) = \mathcal{M}(\gamma(s)).$$

Demonstração: A ideia para obtermos a curva γ que prove a primeira parte do Teorema é evidente de 4.2: fixemos $s_0 \in I$ e definamos, para cada $s \in I$,

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \int_{s_0}^s f(u) du, \\ \gamma(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right). \end{aligned}$$

Esta curva γ satisfaz as condições exigidas: está parametrizada por comprimento de arco pois $\gamma'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$; como este vector faz um ângulo $\theta(s)$ com o eixo OX , pela Proposição 4.2 a sua curvatura com sinal é igual a $\theta'(s) = f(s)$.

Para provar a segunda parte do Teorema, seja $\tilde{\theta}(s)$ o ângulo entre OX e o vector tangente $\tilde{\gamma}'(s)$ de $\tilde{\gamma}$. Então $\tilde{\gamma}'(s) = (\cos \tilde{\theta}(s), \sin \tilde{\theta}(s))$. Consequentemente,

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \tilde{\theta}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \tilde{\theta}(t) dt \right) + \tilde{\gamma}(s_0). \quad (4.4.1)$$

Por outro lado, pela Proposição 4.2, $\tilde{\theta}'(s) = f(s)$, pelo que

$$\tilde{\theta}(s) = \int_{s_0}^s f(u) du + \tilde{\theta}(s_0) = \theta(s) + \tilde{\theta}(s_0).$$

Inserindo isto em (4.4.1) e denotando $\tilde{\gamma}(s_0)$ por a e $\tilde{\theta}(s_0)$ por θ_0 , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s) &= \mathcal{T}_a \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \theta_0) dt, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t) + \theta_0) dt \right) \\ &= \mathcal{T}_a \left(\cos \theta_0 \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt - \sin \theta_0 \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \sin \theta_0 \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt + \cos \theta_0 \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) \\ &= \mathcal{T}_a \mathcal{R}_{\theta_0} \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt \right) \\ &= \mathcal{T}_a \mathcal{R}_{\theta_0}(\gamma(s)). \end{aligned}$$

■

Exemplos 4.5. (1) Seja $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura é constante, igual a $k > 0$. Então $\kappa_{\mathbb{S}}(s) = \pm k$ para cada $s \in I$, mas como $\kappa_{\mathbb{S}}$ é uma função suave, $\kappa_{\mathbb{S}}(s) = k$ para qualquer s ou $\kappa_{\mathbb{S}}(s) = -k$ para qualquer

s. Vejamos o que acontece no primeiro caso (o outro discute-se de modo análogo). Pelo Teorema existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura com sinal é constante, igual a k , e $\tilde{\gamma}$ é o resultado da aplicação de um movimento rígido a γ . Determinemos tal curva γ :

$$\text{Como } \theta(s) = \int_0^s k \, du = ks,$$

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(kt) \, dt, \int_0^s \sin(kt) \, dt \right) = \left(\frac{\sin(ks)}{k}, -\frac{\cos(ks)}{k} + \frac{1}{k} \right).$$

Fazendo $R = 1/k$ vem

$$\left(R \sin \frac{s}{R}, -R \cos \frac{s}{R} + R \right) = \mathcal{T}_a \left(R \sin \frac{s}{R}, -R \cos \frac{s}{R} \right),$$

onde $a = (0, R)$. Já vimos que

$$\left(R \sin \frac{s}{R}, -R \cos \frac{s}{R} \right)$$

é uma parametrização por comprimento de arco da circunferência de raio R e centro $(0, 0)$, pelo que o traço de γ é a circunferência de raio R e centro $(0, R)$. Em conclusão, como rotações e translações transformam circunferências em circunferências, o traço de $\tilde{\gamma}$ é também uma circunferência.

(2) A demonstração do Teorema fornece-nos um algoritmo que permite, a partir de qualquer função suave f , determinar uma curva plana cuja curvatura com sinal coincida com f . Mas mesmo funções simples podem conduzir a curvas complicadas. Por exemplo, suponhamos que f é a função identidade $f(s) = s$. Seguindo o algoritmo, tomando $s_0 = 0$, obtemos

$$\theta(s) = \int_0^s u \, du = \frac{s^2}{2}$$

e

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \, dt, \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \, dt \right).$$

Contudo, estes integrais (que aparecem na teoria da difracção da luz, onde são chamados *integrais de Fresnel*), não podem ser expressos em termos de funções “elementares”. Só usando métodos numéricos ou tabelas especiais podemos determinar as coordenadas de $\gamma(s)$ num dado valor de s . No entanto, é simples obter uma ideia do traço da curva. Com efeito,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma_1(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma_2(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma_1(s) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma_2(s) = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Além disso, $\gamma'_2(0) = \gamma''_2(0) = 0$. Portanto, a curva tem um ponto de inflexão em $\gamma(0) = (0, 0)$ e aproxima-se assintoticamente do ponto

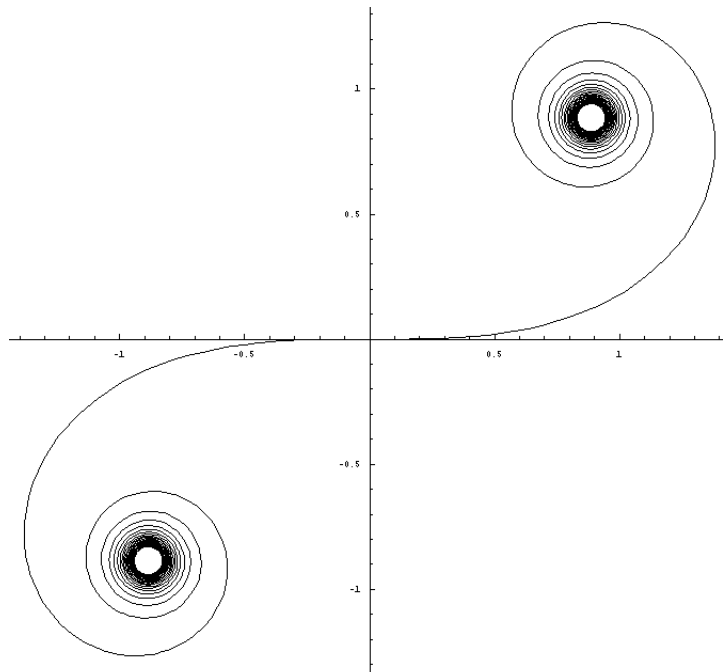
$$P_1 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right)$$

quando $s \rightarrow +\infty$; o mesmo se passa relativamente ao ponto

$$P_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, -\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right)$$

quando $s \rightarrow -\infty$.

A figura seguinte, obtida com o programa Mathematica (que calcula os integrais por aproximação numérica), mostra isso mesmo.



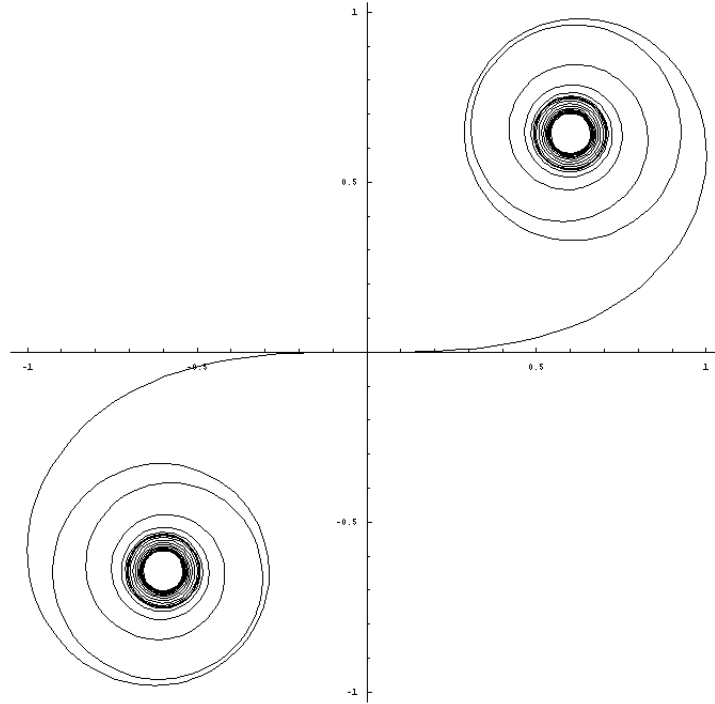
A implementação do algoritmo do Teorema na linguagem do Mathematica é muito simples (como vimos na aula). Com efeito, definindo a rotina

```
plotintrinsic[fun_,a:_0,{c_:0,d_:0,theta0_:0},optsnd___,]
{smin_: -10,smax_:10},optspp___]:=
ParametricPlot[Module[{x,y,theta},
{x[t],y[t]} /.
NDSolve[{x'[ss]==Cos[theta[ss]],
y'[ss]==Sin[theta[ss]],
theta'[ss]==fun[ss],
x[a]==c,y[a]==d,theta[0]==theta0},
{x,y,theta},{ss,smin,smax},optsnd]]//Evaluate,
{t,smin,smax},AspectRatio->Automatic,optspp];
```

bastará depois escrevermos, por exemplo,

```
plotintrinsic[(#+Sin[#])&,0,{0,0,0},{-18,18},PlotPoints->80];
```

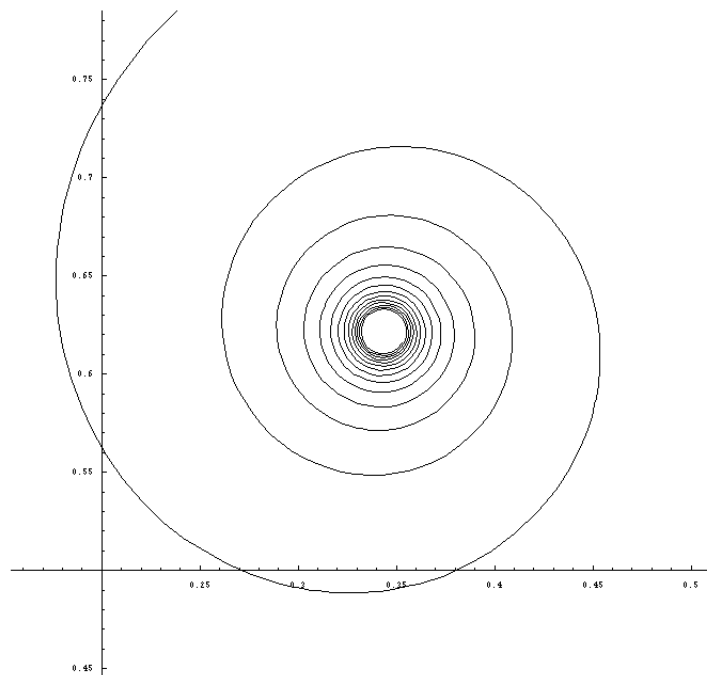
para obtermos o gráfico, para $s \in]-18, 18[$, da curva cuja curvatura é dada pela função $f(s) = s + \sin s$:



As figuras seguintes mostram alguns dos exemplos apresentados na aula:

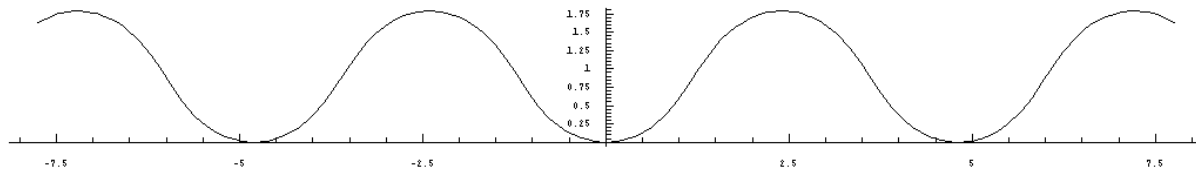
```
plotintrinsic[(Exp[#])&,0,{0,0,0},{-4.5,4.5},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = e^s$$



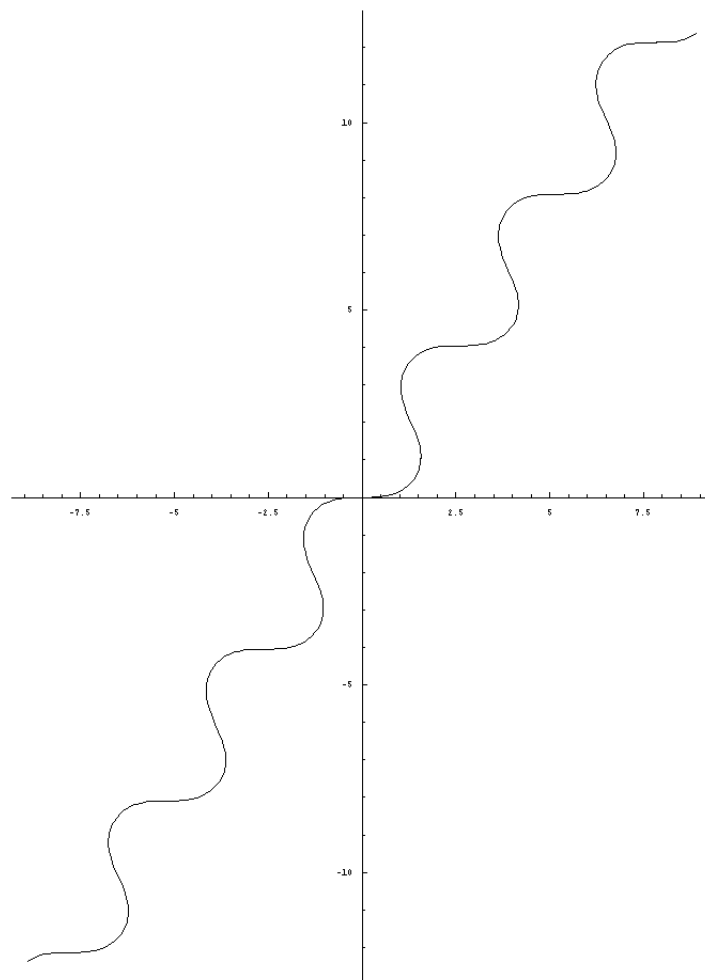
```
plotintrinsic[(Cos[#])&,0,{0,0,0},{-10,10},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = \cos s$$



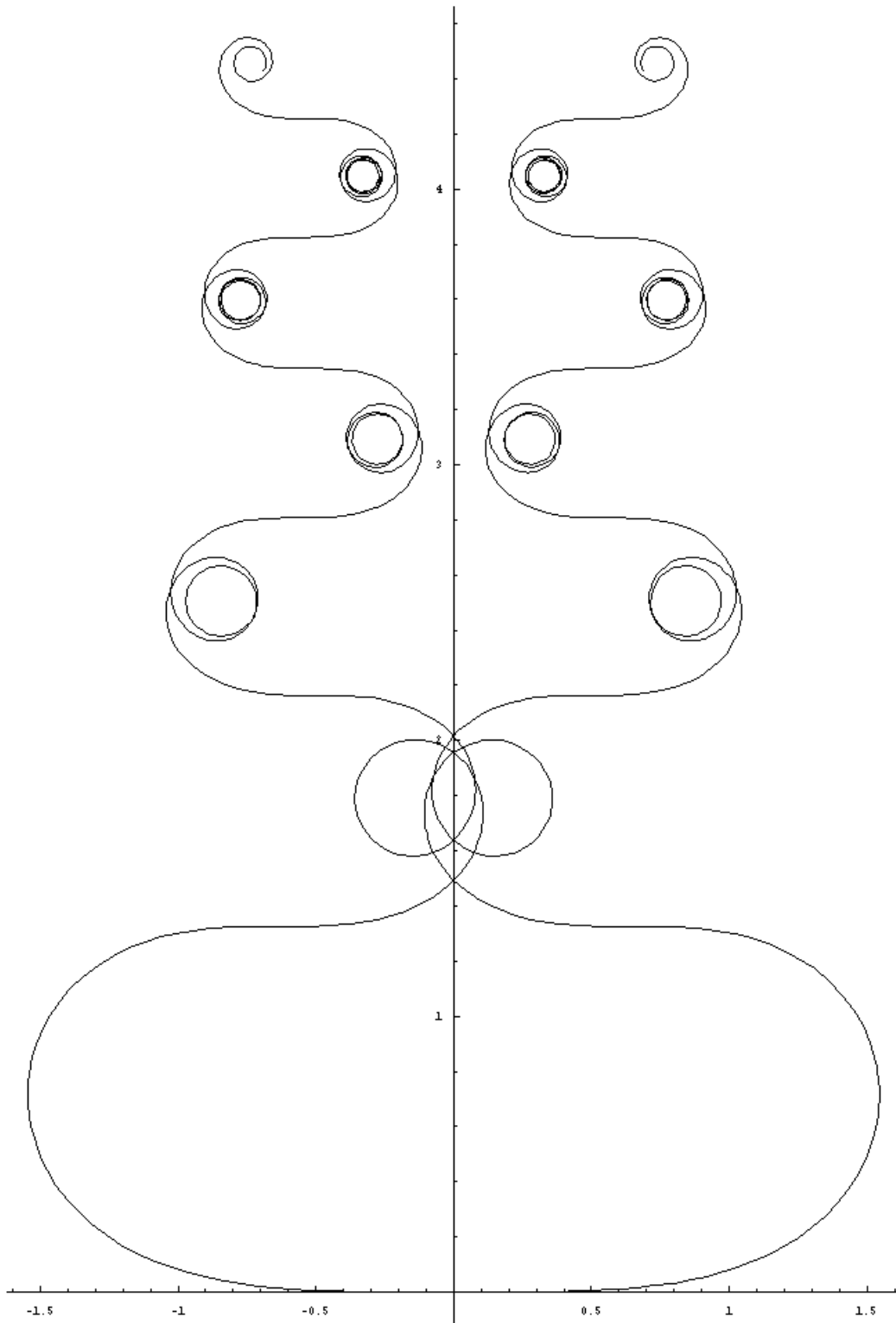
```
plotintrinsic[(Sin[#])&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = \sin s$$



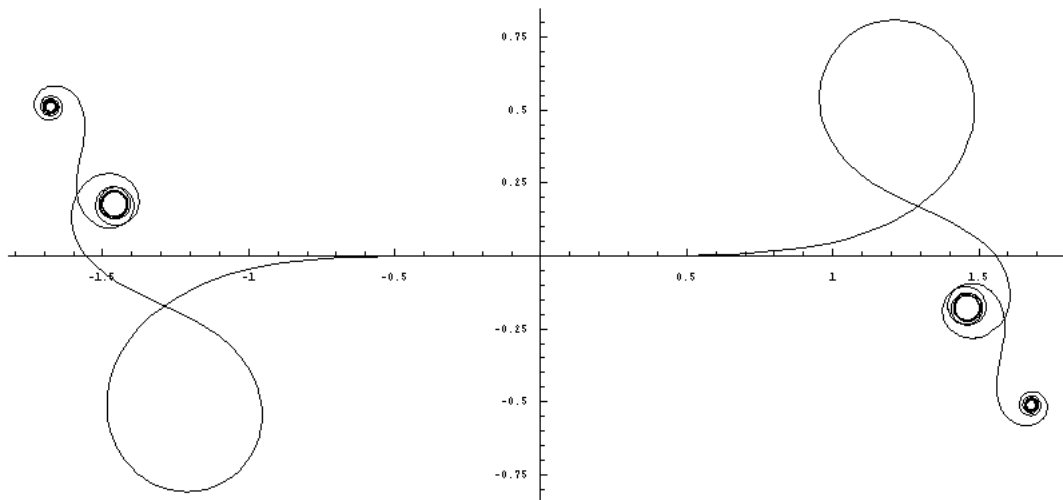
```
plotintrinsic[(#Sin[#])&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = s \sin s$$



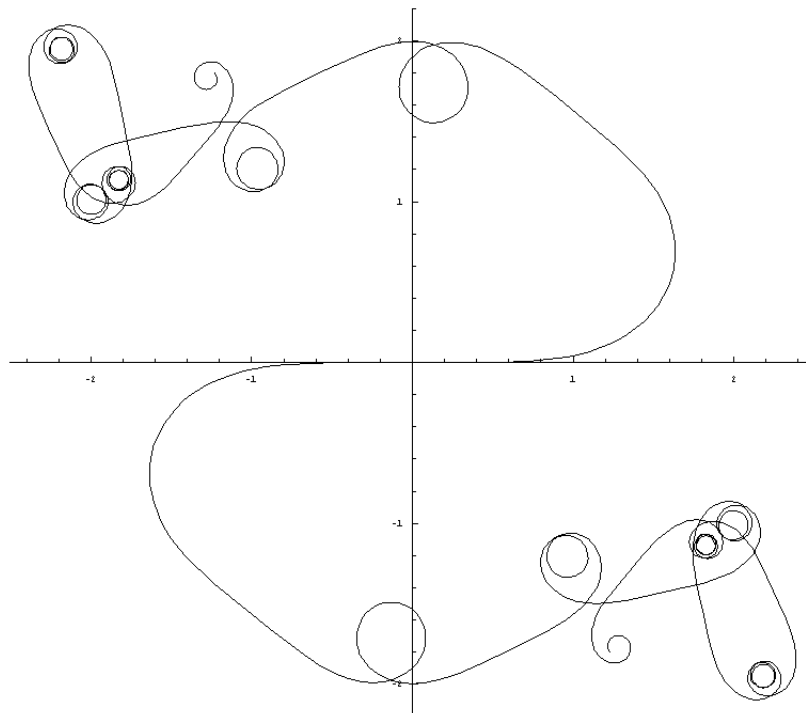
```
plotintrinsic[(#^2Sin[#])&,0,{0,0,0},{-8,8},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = s^2 \sin s$$



```
plotintrinsic[(#Sin[#]^2)&,0,{0,0,0},{-20,20},PlotPoints->80];
```

$$f(s) = s \sin^2 s$$



Exercícios

- 4.1 Prove que a curva $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\right)$ é plana.
- 4.2 Mostre que o traço da curva do Exercício 3.1(b) é uma circunferência, e determine o seu centro e o seu raio. Em que plano se encontra essa circunferência?

- 4.3 Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que o vector w que se obtém de v por uma rotação, no sentido positivo, de um ângulo recto, tem coordenadas $(-v_2, v_1)$.
- 4.4 Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana e denote por γ_1 e γ_2 as respectivas funções componente. Prove que:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T(t) &= \left(\frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}}, \frac{\gamma'_2(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}} \right); \\ \text{(b)} \quad N_{\mathbf{s}}(t) &= \left(-\frac{\gamma'_2(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}}, \frac{\gamma'_1(t)}{\sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}} \right); \\ \text{(c)} \quad \kappa_{\mathbf{s}}(t) &= \frac{\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) - \gamma'_2(t)\gamma''_1(t)}{((\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

- 4.5 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco e com curvatura positiva. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva não necessariamente parametrizada por comprimento de arco tal que, para cada $t \in I$, a recta tangente a α em $\alpha(t)$ é a recta normal a γ em $\gamma(t)$. Prove que, para cada $t \in I$,

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_{\gamma}(t)} N_{\gamma}(t).$$

- 4.6 Determine explicitamente a curva plana parametrizada por comprimento de arco tal que:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \kappa_{\mathbf{s}}(s) &= 2; & \text{(b)} \quad \kappa_{\mathbf{s}}(s) &= s^{-1/2}; \\ \text{(c)} \quad \kappa_{\mathbf{s}}(s) &= \frac{1}{s+a} \quad (a \text{ constante}); & \text{(d)} \quad \kappa_{\mathbf{s}}(s) &= \frac{a}{a+s^2} \quad (a \text{ constante}). \end{aligned}$$

- 4.7 (a) Considere a espiral logarítmica $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma_a(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t)$, sendo a uma constante não nula. Mostre que existe uma única reparametrização por comprimento de arco

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_a : J &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \tilde{\gamma}_a(s) \end{aligned}$$

tal que

- $J \subseteq (0, +\infty)$ e
- $s \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ (caso $a > 0$) ou $t \rightarrow +\infty$ (caso $a < 0$).

Determine a correspondente mudança de parâmetro, que ao parâmetro $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder o parâmetro $s \in J$, e mostre que a curvatura com sinal de γ_a é igual a $1/as$.

- (b) Descreva toda a curva cuja curvatura com sinal, como função do parâmetro s por comprimento de arco, é igual a $1/as$ para alguma constante não nula a .
- 4.8 Uma dada curva plana γ parametrizada por comprimento de arco tem a seguinte propriedade: o seu vector tangente $T(s)$ faz um ângulo constante θ com $\gamma(s)$, para todo o s . Mostre que:

- (a) se $\theta = 0$ então o traço de γ é parte de uma linha recta;
- (b) se $\theta = \pi/2$ então o traço de γ é uma circunferência;
- (c) se $0 < \theta < \pi/2$ então o traço de γ é uma espiral logarítmica (exercício anterior).

- 4.9 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, e seja c uma constante. A curva paralela γ^c é definida por $\gamma^c(t) = \gamma(t) + cN_{\mathbf{s}}(t)$. Prove que, se $|c\kappa_{\mathbf{s}}(t)| < 1$ para qualquer $t \in I$, então γ^c é uma curva regular e a sua curvatura com sinal é igual a $\kappa_{\mathbf{s}}/(1 - c\kappa_{\mathbf{s}})$.

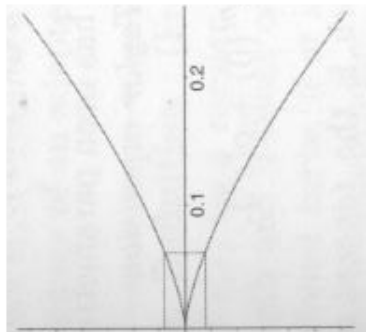
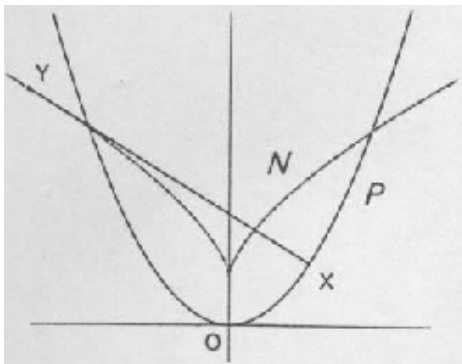
- 4.10 Seja γ uma curva plana, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Define-se o *centro de curvatura* $\epsilon(s)$ de γ no ponto $\gamma(s)$ por

$$\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)} N_s(s).$$

Prove que a circunferência de centro $\epsilon(s)$ e raio $|1/\kappa_s(s)|$ é tangente a γ em $\gamma(s)$ e tem a mesma curvatura que γ nesse ponto. Esta circunferência chama-se *circunferência osculadora* de γ no ponto $\gamma(s)$. (Esboce a figura.)

- 4.11 Com a notação do exercício anterior, podemos olhar $\epsilon(s)$ como a parametrização de uma nova curva, chamada *evoluta* de γ (se γ não for parametrizada por comprimento de arco, a sua evoluta é definida como a evoluta de uma sua reparametrização por comprimento de arco).

- (a) Suponhamos que $\kappa'_s(s) > 0$ para cada s . Mostre que o comprimento de arco de ϵ é igual a $u_0 - \frac{1}{\kappa_s(s)}$, onde u_0 é uma constante, e determine a curvatura com sinal de ϵ .
- (b) Mostre que a evoluta da parábola $2y = x^2$ é a *curva de Neil*, de equação $27y^2 = 8(x-1)^3$ (ou, parametricamente, dada por $\gamma(t) = (t^2, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t^3)$, $t \in \mathbb{R}$).



- (c) Mostre que a evoluta do cicloide $\gamma_a(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$, onde $a > 0$ é uma constante, é a curva definida por $\epsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$ (cf. Exercício 2.5) e que, após uma mudança de parâmetro adequada, ϵ pode ser obtida de γ por uma translação no plano.
- 4.12 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $c > 0$. À curva $\iota_c : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\iota_c(s) = \gamma(s) + (c-s)\gamma'(s)$ chama-se *involuta* de γ (se γ não for parametrizada por comprimento de arco, as suas involutas são definidas como as involutas de uma sua reparametrização por comprimento de arco). Mostre que se a curvatura com sinal de γ é estritamente positiva então a curvatura com sinal de ι_c é igual a $1/(c-s)$.
- 4.13 Seja γ uma curva plana parametrizada por comprimento de arco e sejam α e β duas involutas de γ . Mostre que α e β são curvas de Bertrand (recorde o Exercício 3.19).
- 4.14 Seja γ uma curva (regular) plana. Mostre que:
- (a) qualquer involuta da evoluta de γ é uma curva paralela a γ ;
- (b) a evoluta de qualquer involuta de γ é γ .

(Compare estas afirmações com o facto da primitiva da derivada de uma função suave f ser igual a f mais uma constante, enquanto que a derivada da primitiva de f é f .)

- 4.15 Mostre que, aplicando uma reflexão (relativamente a uma recta) a uma curva plana, se altera o sinal da sua curvatura com sinal.
- 4.16 Prove que, se duas curvas planas $\gamma, \tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ têm a mesma curvatura ($\neq 0$) para todos os valores de $t \in I$, então $\tilde{\gamma}$ pode ser obtida de γ por aplicação de um movimento rígido ou por uma reflexão (relativamente a uma recta) seguida de um movimento rígido.

5. Teorema fundamental das curvas

Nesta secção provaremos a versão geral do Teorema Fundamental das Curvas, que mostra que uma curva parametrizada por comprimento de arco fica essencialmente determinada a partir do momento em que conhecemos a sua curvatura e a sua torsão.

Recordemos que um movimento rígido de \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\mathcal{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} é uma rotação em torno da origem e \mathcal{T} é uma translação.

Teorema 5.1. [Teorema fundamental das curvas] *Sejam $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves com $\kappa > 0$. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é κ e cuja torsão é τ .*

E mais: se $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é outra curva parametrizada por comprimento de arco nessas condições, existe um movimento rígido \mathcal{M} de \mathbb{R}^3 tal que, para cada $s \in I$,

$$\tilde{\gamma}(s) = \mathcal{M}(\gamma(s)).$$

Demonstração: As equações (fórmulas de Frenet-Serret)

$$T' = \kappa N \tag{5.1.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{5.1.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{5.1.3}$$

podem ser consideradas como uma equação diferencial em $I \times \mathbb{R}^9$:

$$\begin{aligned} & \left(T_1(s), T_2(s), T_3(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), B_1(s), B_2(s), B_3(s) \right)' = \\ & = \left(\kappa(s)N_1(s), \kappa(s)N_2(s), \kappa(s)N_3(s), \right. \\ & \quad \left. -\kappa(s)T_1(s) + \tau(s)B_1(s), -\kappa(s)T_2(s) + \tau(s)B_2(s), -\kappa(s)T_3(s) + \tau(s)B_3(s), \right. \\ & \quad \left. -\tau(s)N_1(s), -\tau(s)N_2(s), -\tau(s)N_3(s) \right). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Então, se fixarmos $s_0 \in I$ e considerarmos a base canónica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, a teoria das equações diferenciais ordinárias garante-nos que existem funções suaves (únicas) $T, N, B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $T(s_0) = e_1$, $N(s_0) = e_2$, $B(s_0) = e_3$ e cujas componentes verificam (5.1.4). Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix},$$

que exprime os vectores T', N', B' em termos de T, N, B , é anti-simétrica, o terno

$$T(s), N(s), B(s)$$

forma uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 para cada $s \in I$. Com efeito, as equações

$$\begin{aligned}(T|T)' &= 2\kappa(T|N), \\ (T|N)' &= \kappa(N|N) - \kappa(T|T) + \tau(T|B), \\ (T|B)' &= \kappa(N|B) - \tau(T|N), \\ (N|N)' &= -2\kappa(T|N) + 2\tau(B|N), \\ (N|B)' &= -\kappa(T|B) + \tau(B|B) - \tau(N|N), \\ (B|B)' &= -2\tau(N|B).\end{aligned}$$

definem outra equação diferencial, que terá também solução única. Como

$$\left((T|T), (T|N), (T|B), (N|N), (N|B), (B|B) \right)$$

é uma solução dessa equação diferencial (solução que toma o valor $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$ em $s = s_0$) e, com a mesma condição inicial, existe também a solução constante $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$, então, pela unicidade do teorema de existência de soluções deste tipo de equações diferenciais, teremos

$$\begin{aligned}(T(s)|T(s)) &= 1, (T(s)|N(s)) = 0, (T(s)|B(s)) = 0, \\ (N(s)|N(s)) &= 1, (N(s)|B(s)) = 0, (B(s)|B(s)) = 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 , para cada $s \in I$.

Finalmente definamos

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s T(u) du.$$

Então $\gamma'(s) = T(s)$ pelo que γ está parametrizada por comprimento de arco. Além disso, $T' = \kappa N$ pela equação (5.1.1), pelo que, como N é unitário, κ é a curvatura de γ e N a sua normal principal. Como $B(s)$ é um vector perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$, $B(s) = \lambda(s)T(s) \wedge N(s)$, onde λ é uma função suave satisfazendo $\lambda(s) = \pm 1$ para qualquer s . Como $e_3 = e_1 \wedge e_2$, temos $\lambda(s_0) = 1$, logo $\lambda(s) = 1$ para qualquer s . Portanto $B(s)$ é a binormal de γ em s e, pela equação (5.1.3), τ é a torsão de γ .

Para provar a segunda parte, seja $\{T(s), N(s), B(s)\}$ o triedro de Frenet-Serret de γ em $\gamma(s)$ e seja $\{\tilde{T}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s)\}$ o triedro de Frenet-Serret de $\tilde{\gamma}$ no ponto $\tilde{\gamma}(s)$. Fixemos $s_0 \in I$. Como $\{T(s_0), N(s_0), B(s_0)\}$ e $\{\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0)\}$ são bases ortonormadas de \mathbb{R}^3 com orientação positiva, existe uma rotação \mathcal{R} em torno da origem que leva $T(s_0), N(s_0)$ e $B(s_0)$ a $\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0)$ e $\tilde{B}(s_0)$, respectivamente. Além disso, consideremos a translação \mathcal{T} que leva $\gamma(s_0)$ a $\tilde{\gamma}(s_0)$. Seja $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$. Provemos que $\mathcal{M}(\gamma(s)) = \tilde{\gamma}(s)$ para qualquer $s \in I$. Denotemos o triedro de Frenet-Serret da curva $\mathcal{M} \circ \gamma$ por $T_{\mathcal{M}}, N_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}}$. Porque \mathcal{T} é uma translação e \mathcal{R} é uma aplicação linear, $(\mathcal{M} \circ \gamma)'(s) = (\mathcal{R} \circ \gamma')(s)$ para cada $s \in I$ (Exercício 5.1). Então

$$T_{\mathcal{M}}(s_0) = (\mathcal{M} \circ \gamma)'(s_0) = \mathcal{R}(\gamma'(s_0)) = \mathcal{R}(T(s_0)) = \tilde{T}(s_0),$$

$$N_{\mathcal{M}}(s_0) = \frac{T'_{\mathcal{M}}(s_0)}{\kappa_{\mathcal{M}}(s_0)} = \frac{\mathcal{R}(\gamma''(s_0))}{\|\mathcal{R}(\gamma''(s_0))\|} = \frac{\mathcal{R}(\kappa(s_0)N(s_0))}{\|\gamma''(s_0)\|} = \tilde{N}(s_0),$$

$$B_{\mathcal{M}}(s_0) = T_{\mathcal{M}}(s_0) \wedge N_{\mathcal{M}}(s_0) = \tilde{T}(s_0) \wedge \tilde{N}(s_0) = \tilde{B}(s_0).$$

Portanto a aplicação

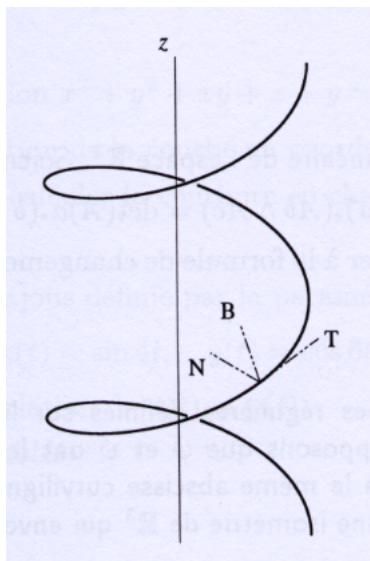
$$A : s \mapsto (\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}(s)|B_{\mathcal{M}}(s))$$

toma o valor 3 em s_0 . Por outro lado, usando as fórmulas de Frenet-Serret, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A'(s) &= (\tilde{T}'(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}'(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}'(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad (\tilde{T}(s)|T'_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{N}(s)|N'_{\mathcal{M}}(s)) + (\tilde{B}(s)|B'_{\mathcal{M}}(s)) \\ &= \kappa(s)(\tilde{N}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) - \kappa(s)(\tilde{T}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \tau(s)(\tilde{B}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) - \tau(s)(\tilde{N}(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \kappa_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{T}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) - \kappa_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{N}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) + \\ &\quad \tau_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{N}(s)|B_{\mathcal{M}}(s)) - \tau_{\mathcal{M}}(s)(\tilde{B}(s)|N_{\mathcal{M}}(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que, como $\mathcal{M} \circ \gamma$ e γ têm o mesmo traço, $\kappa_{\mathcal{M}}(s) = \kappa(s)$ e $\tau_{\mathcal{M}}(s) = \tau(s)$ para qualquer $s \in I$. Consequentemente A é constante, ou seja, $A(s) = 3$ para qualquer $s \in I$. Mas, como $\tilde{T}(s)$ e $T_{\mathcal{M}}(s)$ são vectores unitários, $(\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) \leq 1$, a igualdade ocorrendo se e só se $\tilde{T}(s) = T_{\mathcal{M}}(s)$ (analogamente para $(\tilde{N}(s)|N_{\mathcal{M}}(s))$ e $(\tilde{B}(s)|B_{\mathcal{M}}(s))$). Portanto $A(s) = 3$ implica $(\tilde{T}(s)|T_{\mathcal{M}}(s)) = 1$, ou seja, $\tilde{\gamma}' = (\mathcal{M} \circ \gamma)'$. Então $\tilde{\gamma}(s) - (\mathcal{M} \circ \gamma)(s)$ é uma constante; como $\tilde{\gamma}(s_0) = \mathcal{M}(\gamma(s_0))$, esta constante deve ser zero e $\tilde{\gamma} = \mathcal{M} \circ \gamma$. ■

Exemplo. Seja $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ em todos os seus pontos. Como vimos no Exemplo 3.3, a hélice circular $\gamma_{r,a}$ ($r > 0, a \in \mathbb{R}$) tem curvatura constante $r/(r^2 + a^2)$ e torsão constante $a/(r^2 + a^2)$.



Portanto, pela segunda parte do Teorema, a curva $\tilde{\gamma}$ é o resultado da aplicação de um movimento rígido à hélice circular $\gamma_{r,a}$ tal que

$$\begin{cases} \kappa = \frac{r}{r^2 + a^2} \\ \tau = \frac{a}{r^2 + a^2} \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \\ a = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Em conclusão,

qualquer curva com curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ é, a menos de rotação e translação, a hélice circular $\gamma_{r,a}$ para os valores de r e a dados por (5.1.5).

Exercícios

5.1 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ um movimento rígido de \mathbb{R}^3 . Prove que $T_{\tilde{\gamma}}(s) = \mathcal{R}(T_{\gamma}(s))$ para qualquer $s \in I$, sendo $\tilde{\gamma}$ a curva $\mathcal{M} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

5.2 Descreva todas as curvas em \mathbb{R}^3 que têm curvatura constante $\kappa > 0$ e torsão constante τ .

5.3 (a) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva *esférica* (isto é, cuja imagem está contida numa esfera, de raio r e centro c), parametrizada por comprimento de arco. Prove que:

- (i) A curvatura κ de γ nunca se anula;
- (ii) Se a torsão τ de γ nunca se anula então, para cada $s \in I$,

$$\gamma(s) - c = -\rho(s)N(s) - \rho'(s)\sigma(s)B(s)$$

e

$$r^2 = \rho(s)^2 + (\rho'(s)\sigma(s))^2,$$

onde $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$.

(b) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que, para qualquer $s \in I$, $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$, $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ e $\sigma(s) = 1/\tau(s)$. Mostre que, se a função $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ é constante, γ é esférica. Qual é o raio dessa esfera?

(c) Conclua que, sendo γ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa \neq 0$ e $\tau \neq 0$, então γ é esférica se e só se $\tau/\kappa \equiv (\kappa'/\tau\kappa^2)'$ (ou $\tau\rho \equiv -(\rho'/\tau)'$).

5.4 Seja (a_{ij}) uma matriz 3×3 anti-simétrica (isto é, $a_{ij} = -a_{ji}$ para quaisquer i, j). Sejam v_1, v_2 e v_3 funções suaves de um parâmetro s , satisfazendo as equações diferenciais

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

e suponhamos que para algum s_0 os vectores $v_1(s_0), v_2(s_0)$ e $v_3(s_0)$ são ortonormados. Mostre que os vectores $v_1(s), v_2(s)$ e $v_3(s)$ são ortonormados para qualquer s .

[Sugestão: Encontre um sistema de equações diferenciais de primeira ordem satisfeito pelos produtos escalares $(v_i|v_j)$, e use o facto de tal sistema ter uma única solução com condições iniciais dadas.]

6. Hélices generalizadas

Na secção anterior vimos que a curvatura e a torsão são os invariantes que procurávamos. A descrição de uma determinada família de curvas com propriedades geométricas comuns fica então completa com a obtenção de uma caracterização dessas curvas em termos da curvatura e torsão. Nesta secção ilustraremos isso com o estudo de uma classe especial de curvas — as hélices generalizadas.

As hélices circulares $\gamma_{r,a}$ do Exemplo 3.3 têm uma característica especial: existe um vector unitário u (neste caso, $u = (0, 0, 1)$) tal que o ângulo $\theta(s)$ formado pelos vectores $T(s)$ e u é constante; com efeito,

$$\cos \theta(s) = (T(s)|u) = \left(\left(\dots, \dots, \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) | (0, 0, 1) \right) = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

pelo que

$$\theta(s) = \arccos \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

As curvas que satisfazem esta propriedade chamam-se hélices generalizadas. Portanto, uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *hélice generalizada* se existir um vector unitário u tal que $(T(t)|u)$ não depende do parâmetro t . O vector u diz-se o *eixo* da hélice.

Exemplos. (1) A hélice circular $\gamma_{r,a}$ é uma hélice generalizada de eixo $u = (0, 0, 1)$.

(2) Toda a curva plana é uma hélice generalizada. Com efeito, como o vector binormal $B(t) = B$ não depende de t , se considerarmos $u = B$ é evidente que a definição de hélice generalizada é satisfeita.

O resultado seguinte mostra que é muito fácil identificarmos uma hélice generalizada.

Teorema 6.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva cuja curvatura nunca se anula. Então γ é uma hélice generalizada se e só se a aplicação*

$$t \mapsto \frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$$

é constante.

Demonstração: (1) Em primeiro lugar, provemos o resultado para curvas parametrizadas por comprimento de arco.

“ \Rightarrow ” Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma hélice generalizada, parametrizada por comprimento de arco. Consideremos o seu eixo u , que satisfaz a condição $(T(s)|u) = c$, para qualquer $s \in I$. Começemos por referenciar esse vector na base formada pelo Triedro de Frenet-Serret:

$$u = \alpha_1(s)T(s) + \alpha_2(s)N(s) + \alpha_3(s)B(s)$$

onde

$$\alpha_1(s) = (u|T(s)), \alpha_2(s) = (u|N(s)) \text{ e } \alpha_3(s) = (u|B(s)).$$

Por hipótese $\alpha_1(s) = c$. Além disso, de $(u|T(s)) = c$ decorre, por derivação, $(u|N(s)) = 0$. Portanto $u = cT(s) + \alpha_3(s)B(s)$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= cT'(s) + \alpha_3'(s)B(s) + \alpha_3(s)B'(s) \\ &= c\kappa(s)N(s) + \alpha_3'(s)B(s) - \alpha_3(s)\tau(s)N(s) \\ &= (c\kappa(s) - \alpha_3(s)\tau(s))N(s) + \alpha_3'(s)B(s). \end{aligned}$$

Então $\alpha_3'(s) = 0$ para qualquer s , ou seja $\alpha_3(s) = \alpha$ (constante), e $c\kappa(s) - \alpha\tau(s) = 0$. Consequentemente

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{c}{\alpha}$$

para qualquer $s \in I$, pois $\alpha \neq 0$ (se fosse $\alpha = 0$ teríamos, por um lado, $c\kappa(s) = 0$, ou seja, $c = 0$, e por outro lado $u = cT(s)$ logo $1 = \|u\| = c$, o que seria contraditório).

Note que, como $u = cT(s) + \alpha B(s)$ é unitário, $1 = c^2 + \alpha^2$, isto é, $\alpha = \pm\sqrt{1 - c^2}$.

“ \Leftarrow ” Suponhamos agora que

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = d$$

para qualquer $s \in I$ e consideremos $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = d$$

(tal c existe; basta considerar

$$c = \frac{d}{\sqrt{1 + d^2}}$$

ou, equivalentemente, $c = \cos \theta$ onde $\cotg \theta = d$). Definindo, para cada $s \in I$,

$$s \mapsto u(s) = cT(s) + \sqrt{1 - c^2}B(s),$$

esta função é constante, uma vez que

$$\begin{aligned} u'(s) &= cT'(s) + \sqrt{1 - c^2}B'(s) \\ &= (c\kappa(s) - \tau(s)\sqrt{1 - c^2})N(s) \\ &= (c\kappa(s) - d\kappa(s)\sqrt{1 - c^2})N(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $u(s) = u$ (constante). Como $\|u\| = \sqrt{c^2 + 1 - c^2} = 1$ e $(T(s)|u) = c$, fica provado que γ é uma hélice generalizada.

(2) Finalmente, para provar o resultado para uma curva genérica γ , basta reescrever o caso (1), tendo o cuidado de considerar a velocidade da curva nas fórmulas de Frenet-Serret. Alternativamente, podemos também argumentar do seguinte modo:

Seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ , sendo $\lambda : I \rightarrow J$ a respectiva mudança de parâmetro. Então:

$$\begin{aligned}
\gamma \text{ é uma hélice generalizada} &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_\gamma(t)|u) = c \text{ para qualquer } t \in I \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))|u) = c \text{ para qualquer } t \in I \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_{\tilde{\gamma}}(s)|u) = c \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \tilde{\gamma} \text{ é uma hélice generalizada} \\
&\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\tau_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} = d \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \frac{\tau_\gamma(\lambda^{-1}(s))}{\kappa_\gamma(\lambda^{-1}(s))} = d \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} = d \text{ para qualquer } t \in I. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Note que esta demonstração fornece-nos um método efectivo de cálculo do eixo da hélice, conhecida a constante $d = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$:

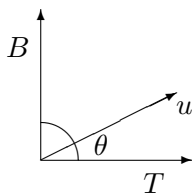
- Determina-se o número $c = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$; equivalentemente, $c = \cos \theta$ onde $\cotg \theta = d$.
- O eixo u é o vector

$$cT + \sqrt{1 - c^2}B = \cos \theta T + \sin \theta B$$

(onde T e B são os vectores tangente e binormal calculados num mesmo s). Portanto o eixo da hélice é um vector unitário no plano rectificante que faz um ângulo

$$\theta = \text{arc cotg} \frac{\tau}{\kappa}$$

com T :



Exercícios

- 6.1 Mostre que qualquer hélice circular é uma hélice generalizada.
- 6.2 Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa_\beta > 0$ e seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = \beta'(t)$. Mostre que se β é uma hélice generalizada então κ_α é constante.
- 6.3 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Prove que as quatro condições seguintes são equivalentes:
 - (i) γ é uma hélice generalizada;
 - (ii) os vectores normais principais são paralelos a um determinado plano fixo;

(iii) os vectores binormais fazem um ângulo constante com uma determinada direcção fixa;

(iv) $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante.

6.4 Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que a curva $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$ é uma hélice generalizada se e só se $4b^4 = 9a^2$ ou $a = 0$ ou $b = 0$. Qual é o seu eixo nesse caso?

II

Superfícies em \mathbb{R}^3

1. PRELIMINARES

O espaço métrico \mathbb{R}^n

O conjunto \mathbb{R}^n munido da aplicação (“distância euclidiana”)

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

é um *espaço métrico* pois d satisfaz os axiomas de definição de *métrica*:

- (1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \geq 0$;
- (2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
- (3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) = d(y, x)$;
- (4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Chama-se *bola aberta* de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ ao conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Um subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *aberto* se, para cada $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. É claro que qualquer bola aberta é um aberto.

Suponhamos agora que S é um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n . Então $d_1 = d|_{S \times S}$ é uma métrica em S e (S, d_1) é também um espaço métrico. Diz-se neste caso que (S, d_1) é um *subespaço métrico* de (\mathbb{R}^n, d) . Designando por $B_\varepsilon^1(x)$ a bola aberta em S de centro $x \in S$ e raio ε em S , temos $B_\varepsilon^1(x) = B_\varepsilon(x) \cap S$. Neste caso, $U \subseteq S$ é *aberto de S* se, para cada $x \in U$, existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^1(x) \subseteq U$. Pode provar-se que, equivalentemente, $U \subseteq S$ é aberto em S se e só se $U = V \cap S$ para algum aberto V de \mathbb{R}^n .

Precisaremos também da noção de espaço métrico conexo: um espaço métrico (X, d) diz-se *conexo* se não existirem abertos U e V , disjuntos e não vazios tais que $X = U \cup V$. Por exemplo, \mathbb{R}^n , qualquer bola aberta em \mathbb{R}^n , $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ são conexos; em \mathbb{R} , os intervalos são os subespaços métricos que são conexos.

Continuidade em \mathbb{R}^n

Uma função $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se *contínua* em $x \in S$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (y \in S \text{ e } d(x, y) < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta^1(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$$

ou ainda, equivalentemente, se para todo o aberto U de \mathbb{R}^m contendo $f(x)$ existe um aberto V em S tal que $f(V) \subseteq U$.

A aplicação f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do domínio. Portanto f é contínua se e só se a imagem inversa de qualquer aberto U de \mathbb{R}^m for um aberto de S .

Propriedades:

- (1) Sejam $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : S_2 \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações contínuas tais que $f(S_1) \subseteq S_2$. Então $g \circ f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua. Mais geralmente, se f e g são aplicações contínuas quaisquer então $g \circ f : f^{-1}(S_2) \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua.
- (2) Se $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e $S_1 \subseteq S$ então $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é também contínua.
- (3) Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é contínua e S_1 é conexo então $f(S_1)$ é conexo.
- (4) Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua com S conexo. Se $a, b \in f(S)$ com $a \leq b$ e $y \in \mathbb{R}$ é tal que $a \leq y \leq b$ então $y \in f(S)$.

Uma aplicação contínua $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ diz-se um *homeomorfismo* se for bijetiva e a inversa f^{-1} for também contínua.

Facilmente se prova que uma bijecção $f : S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo se e só se for contínua e as imagens de abertos de S_1 forem abertos em S_2 .

Diferenciabilidade em \mathbb{R}^n

Daqui em diante U designará sempre um aberto de \mathbb{R}^n .

Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação real de variável vectorial. A derivada parcial de f relativamente a x_1 no ponto $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in U$, que denotaremos por

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

é a derivada, caso exista, da função real de variável real

$$x \mapsto f(x, y_2, \dots, y_n),$$

calculada em $x = y_1$. De forma análoga podemos definir as outras derivadas parciais. Quando f possui todas as derivadas parciais em todos os pontos de uma vizinhança de (y_1, y_2, \dots, y_n) podemos considerar as derivadas parciais de segunda ordem em (y_1, y_2, \dots, y_n) :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \dots$$

Diz-se que f é *suave* se tiver derivadas parciais contínuas de qualquer ordem, em todos os pontos de U . Quando f é suave as derivadas parciais de f são independentes da ordem pela qual são calculadas, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ etc.}$$

Ao vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

chama-se *gradiente* de f .

Mais geralmente, diz-se que $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *suave* se todas as derivadas parciais das componentes f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) de f existirem em todos os pontos de U e forem contínuas.

Propriedades:

- (1) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave e $V \subseteq U$ é aberto em \mathbb{R}^n então $f|_V$ é também suave.
- (2) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são suaves então $f + g$ é suave; se $m = 1$, $f \cdot g$ é suave; se $m = 1$ e g não for a aplicação nula então $\frac{f}{g}$ é suave.
- (3) Se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, sendo cada U_i aberto em \mathbb{R}^n , e $f|_{U_i}$ é suave então $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave.

A matriz

$$J_f(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(y) \end{bmatrix}$$

chama-se a *matriz jacobiana* de f em y .

Proposição 1.1. *Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações suaves tais que $f(U) \subseteq V$. Então $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é suave e, para cada $x \in U$,*

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x).$$

2. O que é uma superfície?

Nesta secção, formalizamos a noção de superfície em \mathbb{R}^3 . Discutimos em seguida alguns exemplos. Constataremos uma diferença óbvia entre a teoria das curvas e a teoria das superfícies: toda a curva é descrita por uma parametrização e existe sempre uma parametrização natural (sob o ponto de vista geométrico) – a parametrização por comprimento de arco. Para as superfícies não existem tais parametrizações e a maior parte das vezes nem sequer é possível encontrar uma parametrização que descreva a totalidade da superfície. Por exemplo, no caso da esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, qualquer que seja a maneira como realizamos a escolha de um par de parâmetros, existirá sempre um ponto, pelo menos, que não poderá ser descrito por eles. As latitude e longitude usuais, por exemplo, falham nos pólos — $(90^\circ N, 30^\circ E)$ e $(90^\circ N, 60^\circ O)$ são o mesmo ponto — e também, de certo modo, no meridiano 180° — este ou oeste?

No curso de Análise já encontraram alguns exemplos de superfícies:

- gráficos de funções de duas variáveis,
- superfícies de revolução,
- superfícies quádras.

Aqui formularemos o conceito de superfície e estudaremos várias propriedades geométricas das superfícies.

O que é então uma superfície? É um subconjunto de \mathbb{R}^3 que “se assemelha” a uma parte de \mathbb{R}^2 “numa vizinhança” de qualquer ponto, tal como a superfície da Terra, embora esférica, parece plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até à linha do horizonte.

Os conceitos topológicos recordados na secção anterior permitem-nos precisar as expressões “se assemelha” e “numa vizinhança”:

Definição 2.1. Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de \mathbb{R}^3 é uma *superfície* se, para cada $p \in S$, existirem um aberto U de \mathbb{R}^2 , um aberto V de \mathbb{R}^3 contendo p e um homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow W = S \cap V$.

Portanto, uma superfície S aparece equipada com uma colecção de homeomorfismos $\sigma : U \rightarrow W$ a que se chama *atlas* da superfície. Cada σ chama-se *parametrização*, *mapa* ou *carta* de S . Cada ponto de S pertence à imagem de pelo menos uma destas parametrizações de S .

A superfície diz-se *suave* se

$$\text{cada parametrização } \sigma \text{ é suave} \tag{2.1.1}$$

e diz-se *regular* se, para cada $\sigma : U \rightarrow W$ e para cada $q \in U$,

$$\text{a matriz } J_\sigma(q) \text{ tem característica } 2. \tag{2.1.2}$$

Analogamente ao que fizemos no Capítulo I, neste capítulo restringir-nos-emos às superfícies suaves (no entanto, nada seria substancialmente alterado se se impusessem condições de diferenciabilidade mais fracas) regulares.

A partir de agora, salvo menção em contrário, quando usarmos a palavra “superfície” estaremos a referir-nos a superfícies suaves regulares.

Como

$$J_\sigma(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a condição (2.1.2) equivale a dizer que, para cada $q \in U$, os vectores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) := \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) \right)$$

e

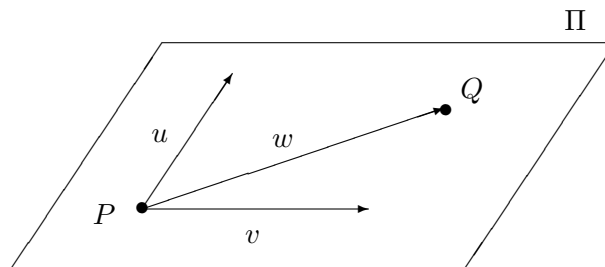
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) := \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \right)$$

são linearmente independentes, ou ainda que, para cada $q \in U$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \neq (0, 0, 0).$$

(Note como esta última condição aparenta a condição de regularidade de uma curva.)

Exemplo. Qualquer plano Π em \mathbb{R}^3 é uma superfície com uma *parametrização global* (isto é, um atlas formado por uma só parametrização). De facto, seja P um ponto do plano e sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores do plano, perpendiculares um ao outro. Então, para cada ponto Q do plano, o respectivo vector de posição w



é uma combinação linear de u e v , digamos $\alpha u + \beta v$ para alguns escalares α e β . Portanto $Q - P = w = \alpha u + \beta v$, ou seja, $Q = P + \alpha u + \beta v$. A parametrização desejada é então a função

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi \\ (\alpha, \beta) &\mapsto P + \alpha u + \beta v. \end{aligned}$$

É óbvio que se trata de um homeomorfismo suave, sendo a inversa σ^{-1} dada por

$$\sigma^{-1}(Q) = \left((Q - P|u), (Q - P|v) \right).$$

A matriz jacobiana é a matriz

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

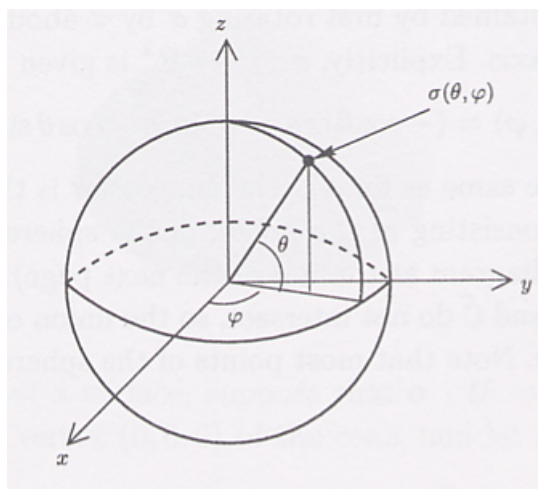
que tem característica 2 uma vez que os vectores u e v são linearmente independentes.

Exemplo. A *esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície. Talvez a parametrização mais óbvia seja a dada pela latitude θ e longitude φ :

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$



Não podemos considerar σ definida em todo o \mathbb{R}^2 , caso contrário não seria injectiva. Para cobrir toda a esfera é suficiente considerarmos

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

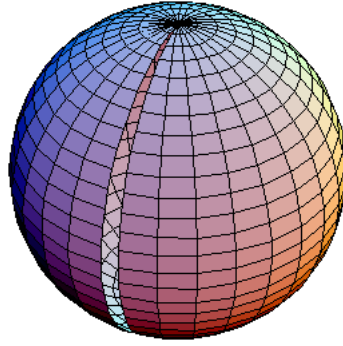
No entanto o conjunto de pares (θ, φ) nestas condições não forma um aberto de \mathbb{R}^2 , e portanto não pode ser usado como domínio de um mapa. O maior aberto de \mathbb{R}^2 consistente com aquelas desigualdades é

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}.$$

Agora a imagem de $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ não é toda a esfera, mas sim

$$S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, y = 0\},$$

ou seja, o complementar da semi-circunferência máxima \mathcal{C} formada pelos pontos $(x, 0, z)$ com $x \geq 0$.



Portanto $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cobre somente uma parte da esfera. A aplicação σ é um homeomorfismo suave de U na intersecção da esfera com o aberto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0 \text{ ou } y \neq 0\}.$$

Quanto à regularidade de σ , como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta).$$

Portanto,

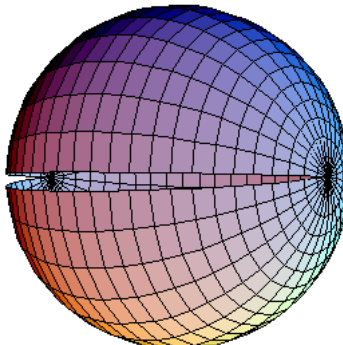
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| \neq 0,$$

pois $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, o que significa que $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \neq (0, 0, 0)$.

Para concluirmos a demonstração de que a esfera é uma superfície, necessitamos de apresentar, pelo menos, mais uma parametrização da esfera que cubra a parte da esfera omitida por σ . Por exemplo, consideremos a parametrização $\tilde{\sigma}$ obtida de σ por rotação de ângulo π em torno do eixo OZ seguida de uma rotação de ângulo $\pi/2$ em torno do eixo OX . Explicitamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : U &\rightarrow S \cap \tilde{V} \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

sendo U o mesmo que em σ e $\tilde{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ ou } z \neq 0\}$. A imagem de $\tilde{\sigma}$ é o complementar da semi-circunferência \tilde{C} máxima formada pelos pontos da esfera da forma $(x, y, 0)$ com $x \leq 0$.



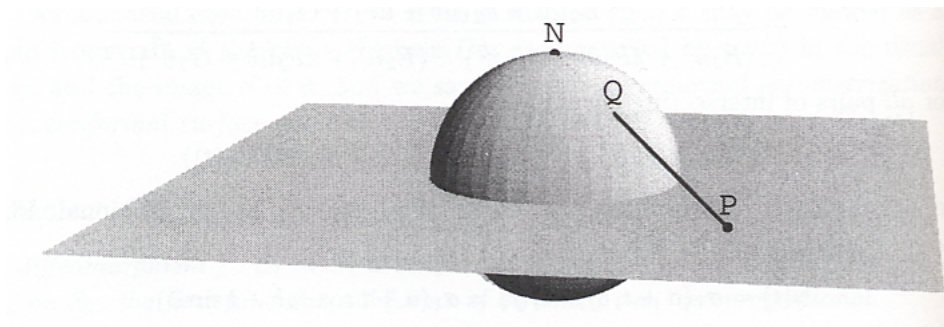
A prova de que $\tilde{\sigma}$ é regular é similar à de σ . É evidente que \mathcal{C} e $\tilde{\mathcal{C}}$ não se intersectam, pelo que a união das imagens de σ e $\tilde{\sigma}$ é a esfera toda. Note que a maioria dos pontos da esfera está na imagem de ambos os mapas.

Um outro atlas da esfera de raio $r > 0$ pode ser estabelecido do seguinte modo. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, consideremos o respectivo ponto $P = (x, y, 0)$ no plano XOY e a recta definida pelo ponto P e pelo pólo norte $N = (0, 0, r)$. Esta recta intersecta a esfera num ponto Q .

Exercício: verifique que

$$Q = \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right).$$

Qualquer ponto Q da esfera, com excepção de N , surge como tal ponto de intersecção.



A função

$$\begin{aligned} \sigma_N : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right) \end{aligned}$$

é uma parametrização da esfera toda menos o pólo norte. Para cobrir este pólo basta considerarmos a parametrização

$$\begin{aligned} \sigma_S : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{S\} \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, -\frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right), \end{aligned}$$

definida, de modo análogo, relativamente ao pólo sul $S = (0, 0, -r)$.

As inversas σ_N^{-1} e σ_S^{-1} chamam-se *projectões estereográficas* (a partir de N e de S , respectivamente).

Exercício: Verifique que

$$\sigma_N^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{rx}{r-z}, \frac{ry}{r-z} \right).$$

Um outro exemplo de atlas da esfera é constituído pelas seis parametrizações

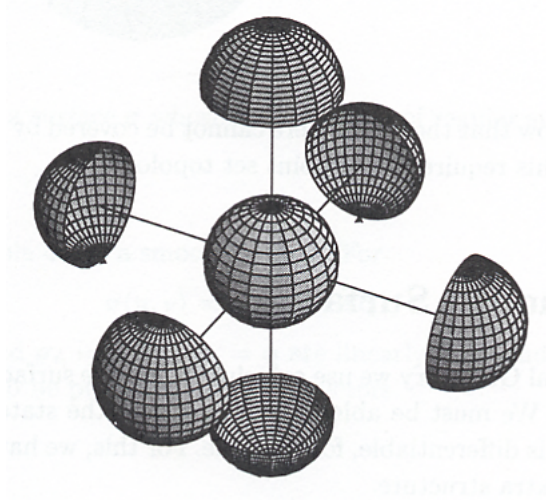
$$\phi_+^x, \phi_-^x, \phi_+^y, \phi_-^y, \phi_+^z, \phi_-^z : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definidas no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < r^2\}$, sendo

$$\phi_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, u, v), \quad \phi_{\pm}^y(u, v) = (u, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, v),$$

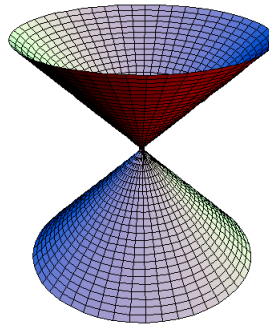
e

$$\phi_{\pm}^z(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}).$$

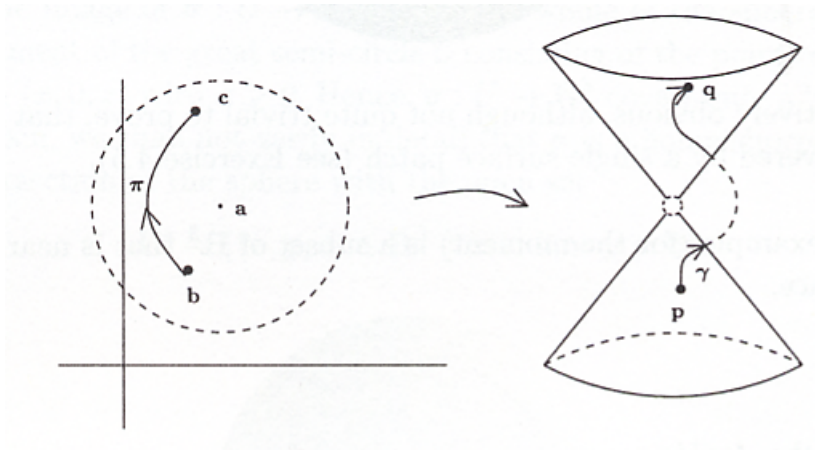


Observação. A esfera *não* pode ser coberta por uma parametrização global (a demonstração desta proposição baseia-se no facto de que, sendo S^2 um compacto de \mathbb{R}^3 e U não sendo um compacto de \mathbb{R}^2 , não pode existir nenhum homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Exemplo. Consideremos agora o cone duplo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.



Neste caso não temos uma superfície. Para concluir isso, suponhamos que $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ é uma parametrização de S contendo o vértice $v = (0, 0, 0)$, e seja $a \in U$ tal que $\sigma(a) = v$. Podemos supor que U é uma bola aberta de centro em a , pois qualquer aberto U contendo a terá que conter uma bola dessas. O aberto V tem que conter necessariamente um ponto p na metade inferior S_- do cone (onde $z < 0$) e um ponto q na metade superior S_+ (onde $z > 0$). Sejam b e c os correspondentes pontos em U e consideremos uma curva π em U passando por b e c e não passando por a . Esta curva é aplicada por σ na curva $\sigma \circ \pi$ em S , passando por p e q e não passando pelo vértice v . Isto é impossível!



Removendo o vértice, já obtemos uma superfície $S_- \cup S_+$ com um atlas formado pelos dois mapas $\sigma_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dadas pela inversa da projecção no plano horizontal XOY :

$$\sigma_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Proposição 2.2. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então o gráfico, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$, de f é uma superfície.*

Demonstração: Basta considerarmos

$$\begin{aligned} \sigma : U &\rightarrow G_f \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

Trata-se, de facto, de uma parametrização global de G_f :

- é claramente bijectiva e suave;
- $\sigma^{-1} : G_f \rightarrow U$ é contínua pois é a restrição a G_f da projecção $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

- $J_{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$ tem característica 2.

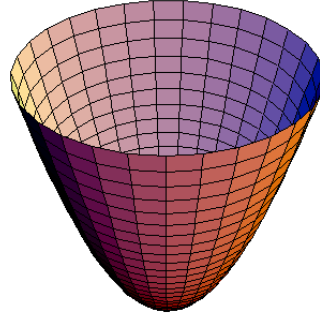
■

Analogamente, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(y, z)\}$ também são superfícies.

Exemplos. (1) O *parabolóide elíptico*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z\}$$

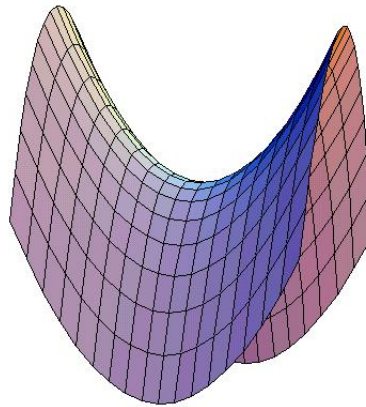
($a > 0, b > 0$) é uma superfície pois $S = G_f$ para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.



(2) Analogamente, o *parabolóide hiperbólico*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z\}$$

também é uma superfície.



Como vimos no caso da esfera, as superfícies são frequentemente dadas como *superfícies de nível* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$, definidas através de equações da forma $f(x, y, z) = a$ onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Nem sempre tais equações definem uma superfície: há que impor a f um certo grau de não degenerescência.

Um número real a diz-se um *valor regular* de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $p \in f^{-1}(a)$, o gradiente $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$.

No exemplo da esfera construímos um atlas por métodos *ad hoc*. O resultado seguinte dá-nos as condições sob as quais é possível construir um atlas para uma superfície de nível qualquer:

Teorema 2.3. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.*

Demonstração: Seja $p \in S = f^{-1}(a) \subseteq U$. Por hipótese,

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Suponhamos então que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (a prova é similar nos outros dois casos). Provaremos o teorema, apresentando um mapa $\sigma : \tilde{U} \rightarrow W \subseteq S$ de uma região aberta W de S contendo o ponto p .

Começemos por considerar a função

$$F : \quad U \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y, f(x, y, z)).$$

A matriz jacobiana de F em p ,

$$J_F(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix},$$

é invertível, uma vez que $|J_F(p)| = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa (da Análise), existem abertos V e \tilde{V} de \mathbb{R}^3 , contendo p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F : V \rightarrow \tilde{V}$ é bijetiva e $F^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V$ é suave. Suponhamos $F^{-1} = (f_1, f_2, f_3)$. É claro que $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ e $f_3 : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Composto f_3 com a função $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\lambda(x, y) = (x, y, a)$, obtemos a função suave

$$h = f_3 \circ \lambda : \quad \lambda^{-1}(\tilde{V}) \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad \mapsto \quad f_3(x, y, a).$$

Pela Proposição 2.2, G_h é uma superfície, que tem como parametrização global

$$\sigma : \quad \lambda^{-1}(\tilde{V}) \quad \rightarrow \quad G_h \\ (x, y) \quad \mapsto \quad (x, y, h(x, y)) = (x, y, f_3(x, y, a)).$$

Temos aqui o que procurávamos:

- $\tilde{U} = \lambda^{-1}(\tilde{V})$ é um aberto de \mathbb{R}^2 ;
- $W = G_h$ é um aberto de S contendo p , pois $G_h = S \cap V$:

“ \subseteq ” Seja $(x, y, z) \in G_h$. Então $z = f_3(x, y, a)$, logo $(x, y, z) = (x, y, f_3(x, y, a)) = F^{-1}(x, y, a) \in V$. Por outro lado,

$$(x, y, a) = FF^{-1}(x, y, a) = F(x, y, f_3(x, y, a)) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

pelo que $a = f(x, y, z)$, ou seja, $(x, y, z) \in f^{-1}(a) = S$.

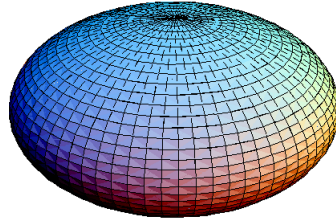
“ \supseteq ” Seja $(x, y, z) \in S \cap V$. Então

$$(x, y, z) = F^{-1}F(x, y, z) = F^{-1}(x, y, f(x, y, z)) = F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f_3(x, y, a)),$$

pelo que $z = f_3(x, y, a) = h(x, y)$. Logo $(x, y, z) \in G_h$. ■

Exemplos. (1) O *elipsóide*

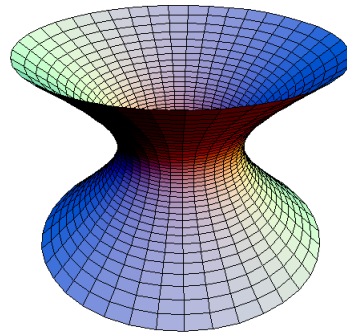
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$



é uma superfície. Com efeito, $S = f^{-1}(1)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y, z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$, e 1 é um valor regular de f , pois $\nabla f = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ só se anula em $(0, 0, 0) \notin S$.

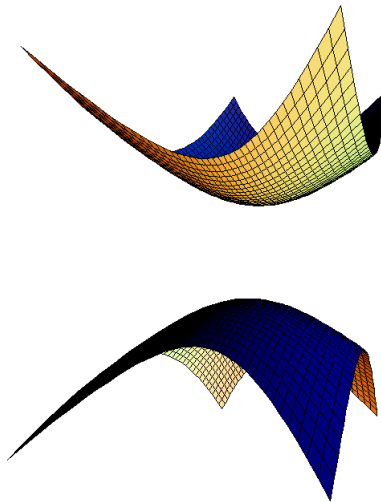
Analogamente, são também superfícies o *hiperbolóide de uma folha*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$



e o *hiperbolóide de duas folhas*

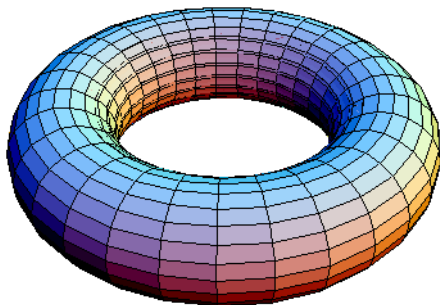
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$



(2) O *toro* obtém-se rodando uma circunferência \mathcal{C} , num plano Π , em torno de uma recta \mathcal{L} , em Π , que não intersecta \mathcal{C} . Tomando para Π o plano XOZ e para \mathcal{L} o eixo OZ , e

sendo a a distância do centro de \mathcal{C} a \mathcal{L} e $r < a$ o raio de \mathcal{C} , o toro é (cf. Exercício 2.10) a superfície de nível dada pela equação

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$



Trata-se de uma superfície, uma vez que

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 \right\} = f^{-1}(r^2),$$

onde

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 \end{aligned}$$

é suave e r^2 é um valor regular de f .

(3) Para o cone duplo do Exemplo da página 65, que observámos na altura não ser uma superfície, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Então $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$ anula-se somente no vértice $(0, 0, 0)$. Por isso este critério não nos permite concluir que $S = f^{-1}(0)$ é uma superfície.

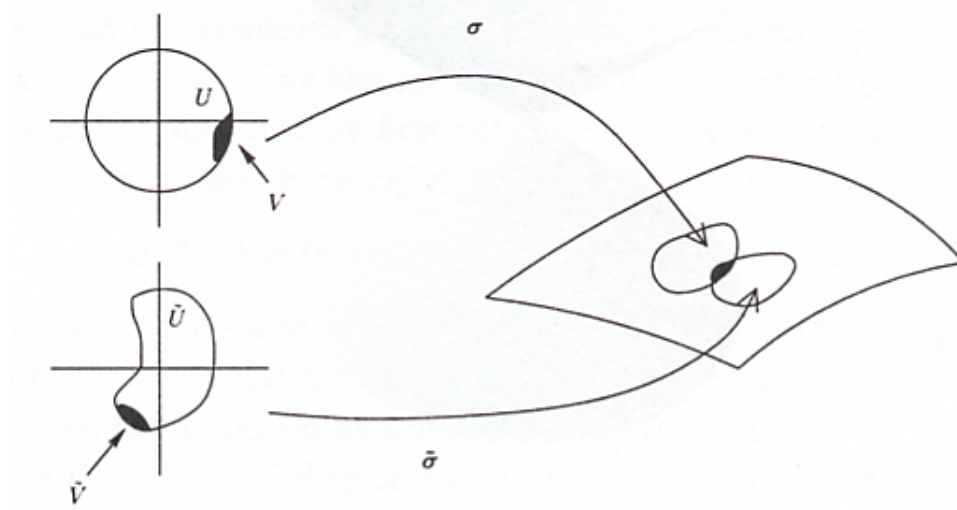
No entanto, removendo este ponto, ficamos com uma superfície, pois S é a união disjunta $S_+ \cup S_-$ (note que, pela definição de superfície, é óbvio que a união de superfícies disjuntas é ainda uma superfície) e quer o cone S_+ quer o cone S_- são superfícies por 2.3:

$$S_+ = f_+^{-1}(0) \text{ e } S_- = f_-^{-1}(0) \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} f_+ : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_- : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Como o exemplo da esfera mostra, um ponto p de uma superfície S pode estar, em geral, na imagem de mais do que um mapa. Suponhamos que $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ e $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \subseteq S$ são dois mapas de S tais que $p \in W \cap \tilde{W}$.



Como σ e $\tilde{\sigma}$ são homeomorfismos, $\sigma^{-1}(W \cap \tilde{W})$ e $\tilde{\sigma}^{-1}(W \cap \tilde{W})$ são abertos $V \subseteq U$ e $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$, respectivamente. O homeomorfismo $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma : V \rightarrow \tilde{V}$ chama-se *aplicação de transição* ou *mudança de coordenadas* de σ para $\tilde{\sigma}$. Denotando-a por Φ , temos

$$\sigma(u, v) = \tilde{\sigma}(\Phi(u, v))$$

para qualquer $(u, v) \in V$.

Sendo a superfície suave, cada Φ é suave:

Proposição 2.4. *A mudança de coordenadas $\Phi = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma : V \rightarrow \tilde{V}$ é um homeomorfismo suave entre abertos de \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Uma vez que W e \tilde{W} são abertos em S , $W \cap \tilde{W}$ é um aberto em S e também em W . Logo V é um aberto em U o que, como U é um aberto de \mathbb{R}^2 , implica sê-lo também em \mathbb{R}^2 . Analogamente, \tilde{V} é também aberto em \mathbb{R}^2 . Então Φ é um homeomorfismo por ser a composição das aplicações $\sigma : V \rightarrow W \cap \tilde{W}$ e $\tilde{\sigma}^{-1} : W \cap \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$ que são homeomorfismos visto σ e $\tilde{\sigma}$ o serem.

Para demonstrarmos que $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ é suave, provaremos que para cada $q \in V$ existe um aberto U_q tal que a restrição de $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ a U_q é suave.

Seja então $q \in V$, com $\sigma(q) = p$ e $\tilde{\sigma}(r) = p$. Uma vez que $\tilde{\sigma}$ é uma parametrização, há uma submatriz 2×2 de $J_{\tilde{\sigma}}(r)$ com determinante não nulo. Claro que podemos, sem perda de generalidade, supor que se trata da submatriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial x}(r) & \frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial y}(r) \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial x}(r) & \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial y}(r) \end{bmatrix}$$

onde $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$. Considerando $\Pi \circ \tilde{\sigma}$, com $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Pi(x, y, z) = (x, y)$, e usando o Teorema da Função Inversa, podemos concluir que existe um aberto V_r de \mathbb{R}^2 tal que a restrição de $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ a V_r é injectiva. Designemos $\tilde{\sigma}(V_r)$ por V_1 .

Definamos $F : V_r \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (\tilde{\sigma}_1(x, y), \tilde{\sigma}_2(x, y), \tilde{\sigma}_3(x, y) + z)$. Então $J_F(r, 0)$ tem determinante não nulo e F é localmente invertível em $(r, 0)$, isto é,

existem abertos em \mathbb{R}^3 , $W_{(r,0)}$ e W_p , tais que $F : W_{(r,0)} \rightarrow W_p$ é invertível e F^{-1} é suave. Como $\sigma : U \rightarrow U'$ é contínua, existe um aberto U_q de \mathbb{R}^2 contido em $\sigma^{-1}(U' \cap V_1)$ tal que $\sigma(U_q) \subseteq W_q$. Observemos finalmente que

$$(F^{-1} \circ \sigma)|_{U_q} = ((\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}, 0),$$

o que mostrará que, sendo $F^{-1} \circ \sigma$ uma aplicação suave, a aplicação $(\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}$ é suave:

Seja $(x, y) \in U_q$ e suponhamos que $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x_1, y_1, z_1)$. Como $\sigma(x, y) \in U' \cap V_1$, existe $(x', y') \in V_r$ tal que $\tilde{\sigma}(x', y') = \sigma(x, y)$. De $F(x_1, y_1, z_1) = \sigma(x, y) = \tilde{\sigma}(x', y')$ decorre que $(x_1, y_1, z_1) = (x, y, 0)$, pela injectividade de $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)|_{V_r}$. Portanto $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x', y', 0) = ((\tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma)(x, y), 0)$, conforme pretendíamos demonstrar. ■

Um raciocínio análogo mostra que $\Phi^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ também é suave. O resultado seguinte é uma espécie de recíproco:

Proposição 2.5. *Sejam U e \tilde{U} abertos de \mathbb{R}^3 e $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização (regular, suave) de S . Seja ainda $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ um homeomorfismo suave com inversa Φ^{-1} suave. Então $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow S$ é também uma parametrização de S .*

Demonstração: A função $\tilde{\sigma}$ é suave porque a composição de funções suaves é ainda suave.

Para provar a regularidade de $\tilde{\sigma}$, seja $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$. Como $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$, então

$$J_{\tilde{\sigma}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = J_{\sigma}(u, v) \cdot J_{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Isto significa que

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v) \\ &= \det(J_{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v). \end{aligned}$$

Como Φ é um homeomorfismo, $J_{\Phi^{-1}} = (J_{\Phi})^{-1}$; em particular, a matriz J_{Φ} é invertível, ou seja, o seu determinante é diferente de zero. Portanto

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq (0, 0, 0).$$

■

Se dois mapas σ e $\tilde{\sigma}$ num atlas de S estão relacionados como nesta proposição, dizemos que $\tilde{\sigma}$ é uma *reparametrização* de σ e que Φ é uma *mudança de coordenadas*. Note que σ é também uma reparametrização de $\tilde{\sigma}$ pois $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi^{-1}$.

No seguimento de 2.4 e 2.5, terminamos esta secção com a noção de função suave entre superfícies, de que necessitaremos mais adiante, e que permite o desenvolvimento de algum cálculo diferencial sobre uma superfície regular. Este cálculo é uma generalização natural do cálculo diferencial sobre um aberto de \mathbb{R}^2 .

A noção de função suave entre superfícies formaliza-se através da noção de suavidade para funções $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

Definição. Sejam S_1 e S_2 superfícies e W um aberto de S_1 . Uma função

$$f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$$

diz-se *suave* se, para quaisquer mapas $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ de S_1 e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$ de S_2 tais que $W_1 \cap f^{-1}(W_2) \neq \emptyset$, $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Claro que na prática esta definição é perfeitamente inútil para verificarmos se uma dada aplicação é ou não suave. Como já observámos que as mudanças de coordenadas têm “boas” propriedades (o que implica, nomeadamente, que todos os conceitos que se exprimam em termos das coordenadas locais – ou seja, de um dado mapa – não dependem do sistema de coordenadas usado, mas apenas da superfície), podemos obter o seguinte critério, mais útil na prática:

Proposição 2.6. *Uma aplicação $f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ é suave se, para cada $p \in W$, existem mapas $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$, de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p \in W_1$, $f(p) \in W_2$ e $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.*

Demonstração: Sejam $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{W}_1$ e $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{W}_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2) \neq \emptyset$. Pretendemos provar que

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2)) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

é suave. Seja $q \in \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{W}_1 \cap f^{-1}(\tilde{W}_2))$, com $\tilde{\sigma}_1(q) = p$. Então, por hipótese, existem parametrizações σ_1 e σ_2 em p e $f(p)$, respectivamente, tais que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave. Ora

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1 = (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1),$$

que é evidentemente suave pois trata-se de uma composição de aplicações suaves (uma vez que as mudanças de coordenadas são suaves), é a restrição de $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ a um aberto de \mathbb{R}^2 contendo q . Como o ponto q é qualquer, segue-se que $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ é suave. ■

Por fim, listemos mais algumas propriedades:

- Se f é suave então $f|_U$ (sendo U um aberto) também é suave.
- Se f é uma aplicação de domínio $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, e, para cada $i \in I$, $f|_{U_i}$ é suave, então f é suave.

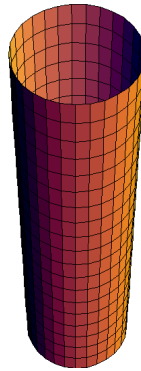
- Se f e g são suaves e podem compor-se então a composição é suave.

Uma aplicação entre superfícies, $f : S_1 \rightarrow S_2$, suave, bijectiva, cuja inversa ainda é suave, chama-se um *difeomorfismo*. Note que

se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo e σ_1 um mapa de S_1 então $f \circ \sigma_1$ é um mapa de S_2 .

Exercícios

- 2.1 Mostre que um disco aberto no plano OXY é uma superfície.
- 2.2 Mostre que o *cilindro circular* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r \neq 0$, pode ser coberto por uma parametrização e, portanto, é uma superfície.



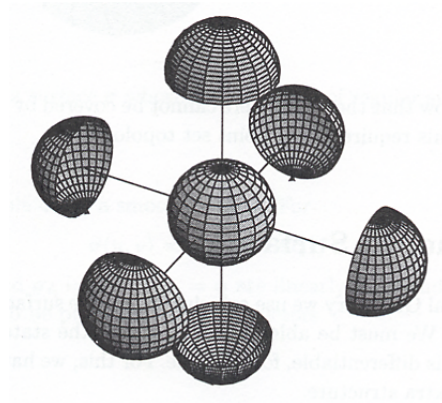
- 2.3 Defina parametrizações $\phi_+^x, \phi_-^x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a *esfera*

$$\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

resolvendo a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ relativamente a x (isto é,

$$\phi_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

definidas no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$). Defina ϕ_{\pm}^y e ϕ_{\pm}^z de modo análogo (com o mesmo U), resolvendo a equação relativamente a y e a z , respectivamente.



Mostre que estas 6 parametrizações asseguram que a esfera é uma superfície.

2.4 Considere a *projecção estereográfica* da esfera

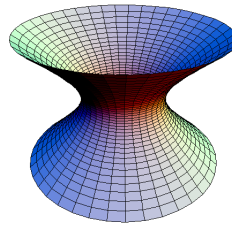
$$\pi : \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que é definida do seguinte modo: para cada $p \in \mathcal{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $\pi(p)$ é o ponto de \mathbb{R}^2 tal que $(\pi(p), 0)$ é o ponto de intersecção do plano $z = 0$ com a recta que contém os pontos $(0, 0, 1)$ e p . Determine a expressão analítica de π , e mostre que π é uma bijecção e que π^{-1} é uma parametrização de \mathcal{S}^2 . Conclua que existem duas parametrizações de \mathcal{S}^2 cuja união cobre toda a esfera.

2.5 O *hiperbolóide de uma folha* é definido por $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Mostre que, para cada θ , a recta

$$(x - z) \cos \theta = (1 - y) \sin \theta, \quad (x + z) \sin \theta = (1 + y) \cos \theta$$

está contida em \mathcal{H} , e que todo o ponto do hiperbolóide pertence a uma destas rectas. Deduza que \mathcal{H} pode ser coberta por uma só parametrização, e portanto que é uma superfície. (Compare com o caso do cilindro do Exercício 2.2.)



Determine uma segunda família de rectas em \mathcal{H} , e mostre que nenhum par de rectas da mesma família se intersecta, enquanto que qualquer recta da primeira família intersecta qualquer recta da segunda família com uma excepção.

2.6 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$, sendo $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Prove que $f(U)$ é uma superfície.

2.7 Mostre que o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde a, b e c são constantes não nulas, é uma superfície.

2.8 Mostre que $\phi(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2)$ define uma parametrização da parte $z > 0$ do *parabolóide hiperbólico* $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

Fazendo uso da Proposição 2.2, determine outra parametrização $\tilde{\phi}$, e verifique que $\tilde{\phi}$ é uma *reparametrização* de ϕ . Determine as duas parametrizações análogas para a parte $z < 0$.

2.9 Prove que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1\}$ é uma superfície.

2.10 Um *toro* obtém-se rodando uma circunferência \mathcal{C} , num plano Π , em torno de uma recta \mathcal{L} (também em Π) que não intersecta \mathcal{C} . Considere para plano Π o plano XOZ e para \mathcal{L} o eixo OZ . Seja ainda $a > 0$ a distância do centro de \mathcal{C} a \mathcal{L} , e $r < a$ o raio de \mathcal{C} . Mostre, de dois modos distintos, que o toro é uma superfície, mostrando que:

(a) tem um atlas consistindo nas parametrizações

$$\sigma(u, v) = \left((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v \right),$$

com (u, v) pertencendo a adequados subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 ;

(b) é a superfície de nível dada por $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

- 2.11 Para que valores de c se pode garantir que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z - 2) + xy = c\}$ é uma superfície?
- 2.12 Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2$. Prove que, apesar de 0 não ser valor regular de f , $f^{-1}(0)$ é uma superfície.

3. Algumas classes especiais de superfícies

Nesta secção descrevemos algumas das classes de superfícies mais simples.

Superfícies quádricas

As superfícies mais simples — os planos — têm equações cartesianas lineares em x, y, z (por exemplo, $z = 2$, $x + y = 0$ ou $x + y + z = 0$). Deste ponto de vista, as superfícies seguintes mais simples serão as que têm equações cartesianas dadas por expressões quadráticas em x, y, z .

Definição. Uma *quádrica* é um subconjunto de \mathbb{R}^3 definido por uma equação da forma

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5yz + 2a_6xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial $(rA | r) + (b | r) + c = 0$, onde

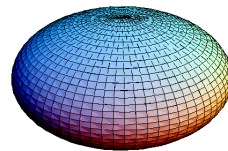
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}.$$

Uma quádrica não é necessariamente uma superfície. Por exemplo, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ define o ponto $(0, 0, 0)$, $x^2 + y^2 = 0$ define a recta $x = y = 0$ (ou seja, o eixo OZ) e $xy = 0$ define a união de dois planos que se intersectam (os planos $x = 0$ e $y = 0$).

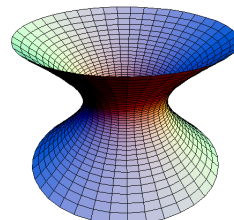
O teorema seguinte mostra que basta considerar quádricas cujas equações tomam uma forma particularmente simples.

Teorema 3.1. *Aplicando um movimento rígido de \mathbb{R}^3 , qualquer quádrica não vazia na qual os coeficientes não são todos nulos pode ser transformada numa cuja equação cartesiana é uma das seguintes (em cada caso, a, b, c são constantes não nulas):*

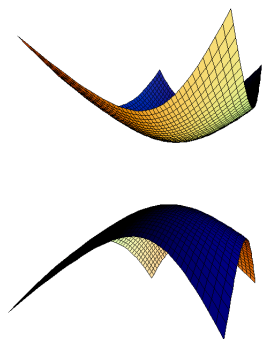
(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (*elipsóide*)



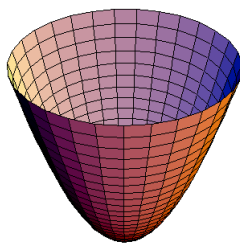
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (*hiperbolóide de uma folha*)



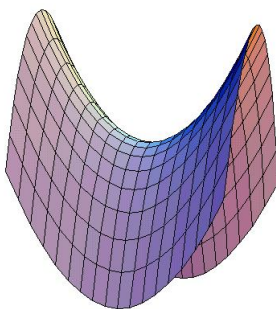
(3) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (*hiperbolóide de duas folhas*)



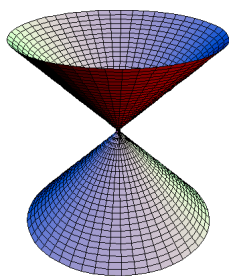
(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ (*parabolóide elíptico*)



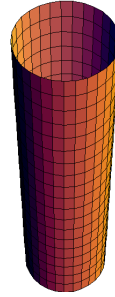
(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ (*parabolóide hiperbólico*)



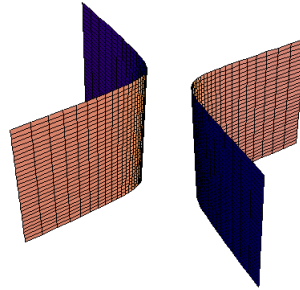
(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (*cone duplo*)



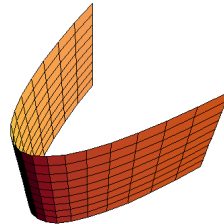
$$(7) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (cilindro elíptico)}$$



$$(8) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (cilindro hiperbólico)}$$



$$(9) \frac{x^2}{a^2} = y \text{ (cilindro parabólico)}$$



$$(10) x = 0 \text{ (plano)}$$

$$(11) x^2 = a^2 \text{ (dois planos paralelos)}$$

$$(12) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (dois planos que se intersectam)}$$

$$(13) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (recta)}$$

$$(14) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (ponto)}.$$

Demonstração: Podemos começar por escrever a quádrica na forma

$$[x \ y \ z]A[x \ y \ z]^T + [b_1 \ b_2 \ b_3][x \ y \ z]^T + c = 0. \quad (3.1.1)$$

Sabemos da Álgebra Linear que existe uma matriz P tal que $P^T P = I$, $|P| = 1$ e $A' = P^T A P$ é diagonal (P é a matriz de diagonalização de A , os elementos na diagonal

de A' são os valores próprios de A e as linhas de P são os correspondentes vectores próprios). Definamos

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z]P$$

e

$$[b'_1 \ b'_2 \ b'_3] = [b_1 \ b_2 \ b_3]P.$$

Substituindo em (3.1.1), obtemos a quádrlica

$$[x' \ y' \ z']A'[x' \ y' \ z']^T + [b'_1 \ b'_2 \ b'_3][x' \ y' \ z']^T + c = 0$$

ou seja,

$$a'_1x'^2 + a'_2y'^2 + a'_3z'^2 + b'_1x' + b'_2y' + b'_3z' + c = 0.$$

Geometricamente, isto significa que aplicámos uma rotação (movimento rígido) à quádrlica inicial, pois qualquer matriz P , 3×3 , tal que $P^T P = I$ e $|P| = 1$ representa uma rotação de \mathbb{R}^3 .

Em conclusão, é sempre possível levar qualquer quádrlica, por rotação, à forma

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0. \quad (3.1.2)$$

Agora, se $a_1 \neq 0$, fazendo $x' = x + \frac{b_1}{2a_1}$ (o que corresponde a uma translação) obtemos

$$a_1x'^2 + a_2y'^2 + a_3z'^2 + b_2y' + b_3z' + c' = 0.$$

Isto mostra que quando $a_1 \neq 0$ podemos assumir $b_1 = 0$; claro que, analogamente, podemos fazer o mesmo a b_2 (quando $a_2 \neq 0$) e b_3 (quando $a_3 \neq 0$). Teremos assim que analisar apenas quatro casos:

Caso 1 ($a_1, a_2, a_3 \neq 0$): Neste caso a quádrlica reduz-se, pelas tais translações, a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + c = 0.$$

Se $c = 0$ obtemos os casos (6) e (14). Se $c \neq 0$ obtemos os casos (1), (2) e (3), consoante os sinais de a_1, a_2, a_3 e c .

Caso 2 ($a_1, a_2 \neq 0, a_3 = 0$): Neste caso a quádrlica reduz-se a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z + c = 0.$$

Se $b_3 = 0$ então $a_1x^2 + a_2y^2 + c = 0$. Neste caso, se $c = 0$ obtemos os casos (12) e (13), e se $c \neq 0$ obtemos, dividindo por $-c$, os casos (7) e (8). Se $b_3 \neq 0$, efectuamos a translação

$$z' = z + \frac{c}{b_3}$$

reduzindo a quádrlica a

$$a_1x^2 + a_2y^2 + z = 0.$$

Isto dá os casos (4) e (5). Com efeito: $a_1, a_2 < 0$ dá imediatamente o caso (4), e $a_1 < 0, a_2 > 0$ ou $a_1 > 0, a_2 < 0$ origina o caso (5); se $a_1, a_2 > 0$, fazendo a rotação de

ângulo π em torno do eixo OX , ou seja, fazendo $x' = x, y' = -y$ e $z' = -z$, obtemos $a_1x^2 + a_2y^2 = z$, isto é, o caso (4).

Caso 3 ($a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0$): A quádrlica (3.1.2) reduz-se a

$$a_1x^2 + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Se $b_2, b_3 \neq 0$, rodando o plano OYZ de modo a que o eixo OY fique paralelo ao vector (b_2, b_3) , chegamos à situação $b_2 \neq 0, b_3 = 0$ e depois, pela translação $y' = y + \frac{c}{b_2}$ ao longo do eixo OY , podemos fazer $c = 0$. Chegamos assim a $a_1x^2 + y = 0$, ou seja, o caso (9). Se $b_2, b_3 = 0$ então, se $c = 0$ obtemos o caso (10), e se $c \neq 0$ o caso (11).

Caso 4 ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$): Neste caso, (3.1.2), quando não é vazia, é a equação de um plano, que por um movimento rígido óbvio se reduz ao caso (10) novamente. ■

Exemplo. Consideremos a quádrlica $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$. Neste caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

já é diagonal. Efectuando a translação $x_1 = x + 3$ e $y_1 = y - 1$ obtemos

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 3z = 18.$$

Em seguida, pela translação $z_1 = z - 6$ chegamos a

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1 = 0.$$

Estamos assim no caso 2 da demonstração do Teorema. Efectuando a rotação de ângulo π , em torno do eixo OX , ou seja, fazendo $x_2 = x_1, y_2 = -y_1, z_2 = -z_1$, obtemos

$$\frac{1}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}y_2^2 = z_2,$$

que define um parabolóide elíptico de eixos $\sqrt{3}$ e $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Como já sabemos, esta superfície tem uma parametrização global dada por $x_2 = u \in \mathbb{R}, y_2 = v \in \mathbb{R}$ e $z_2 = \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}v^2$, isto é,

$$\tilde{\sigma} : (u, v) \mapsto (u, v, \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}v^2).$$

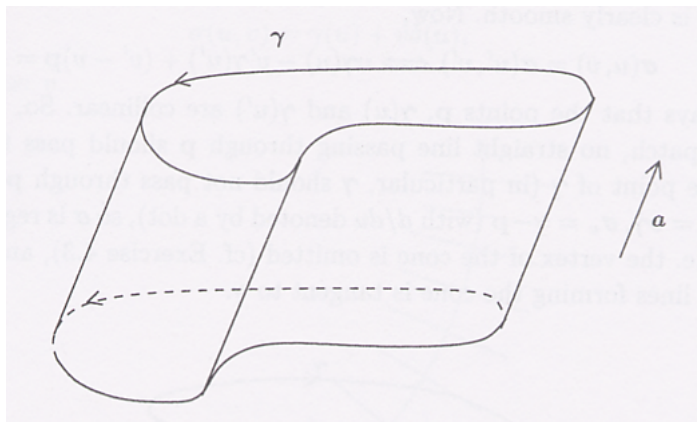
Isto corresponde, na quádrlica inicial, a $x = x_2 - 3 = u - 3, y = 1 - y_2 = 1 - v$ e $z = 6 - z_2 = 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2$. Portanto a quádrlica inicial é um parabolóide elíptico com uma parametrização global dada por

$$\sigma(u, v) = \left(u - 3, 1 - v, 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2 \right).$$

Cilindros generalizados

Um *cilindro (generalizado)* é uma superfície que se obtém por translação de uma curva $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se a é um vector unitário na direcção da translação, o ponto obtido trasladando o ponto $\gamma(u)$ da curva pelo vector va paralelo a a é

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + va.$$



Isto define uma função $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$, claramente suave. Como

$$\sigma(u, v) = \sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) \Leftrightarrow \gamma(u) - \gamma(\tilde{u}) = (\tilde{v} - v)a,$$

σ é injectiva quando nenhuma recta paralela a a intersecta γ em mais do que um ponto. Finalmente,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \gamma'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = a,$$

pelo que σ é regular se e só se o vector $\gamma'(u)$ nunca é paralelo a a .

A parametrização toma uma forma muito simples quando γ está num plano perpendicular a a (o que pode ser sempre atingido, substituindo γ pela sua projecção num tal plano). A condição de regularidade é então satisfeita desde que $\gamma'(u)$ nunca se anule, isto é, quando γ é regular. Podemos também considerar que o plano da curva é o plano OXY e $a = (0, 0, 1)$. Então

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$$

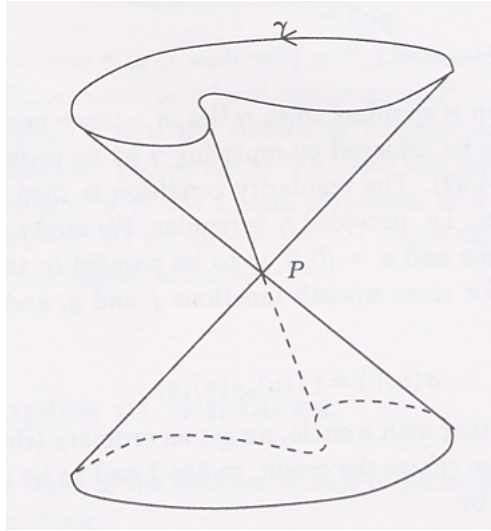
para funções suaves f e g , e a parametrização vem

$$\sigma(u, v) = (f(u), g(u), v).$$

Por exemplo, o cilindro circular usual é gerado pela circunferência γ de equação $x^2 + y^2 = 1$, que pode ser parametrizada por $\gamma(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, para $0 < u < 2\pi$ e $-\pi < u < \pi$ por exemplo. Isto dá um atlas para o cilindro formado por dois mapas, ambos dados por $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, e definidos nos abertos $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}$ e $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\}$.

Cones generalizados

Um *cone (generalizado)* é uma união de rectas passando por um dado ponto p (o *vértice* do cone) e pelos pontos de uma dada curva $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Cada ponto de cada uma dessas rectas é da forma

$$\sigma(u, v) = (1 - v)p + v\gamma(u).$$

Esta função σ é claramente suave. Como

$$\sigma(u, v) = \sigma(\tilde{u}, \tilde{v}) \Leftrightarrow v\gamma(u) - \tilde{v}\gamma(\tilde{u}) + (\tilde{v} - v)p = 0$$

significa que os pontos p , $\gamma(u)$ e $\gamma(\tilde{u})$ são colineares, σ é injectiva quando nenhuma recta que passa por p passa por mais do que um ponto de γ (em particular, γ não pode passar por p). Finalmente,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = v\gamma'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \gamma(u) - p,$$

pelo que σ é regular desde que $v \neq 0$ (ou seja, o vértice do cone é omitido) e nenhuma das rectas que forma o cone é tangente a γ .

Esta parametrização toma a forma mais simples possível quando γ é plana. Se este plano contiver p , o cone é parte desse plano. Senão, podemos supor que p é a origem e o plano é o plano $z = 1$. Então, $\gamma(u) = (f(u), g(u), 1)$ para funções suaves f e g , e a parametrização toma a forma

$$\sigma(u, v) = v(f(u), g(u), 1).$$

Tubos

Seja $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, para a qual existe $r > 0$ tal que $\kappa(s) < r^{-1}$ para qualquer $s \in (\alpha, \beta)$. A circunferência

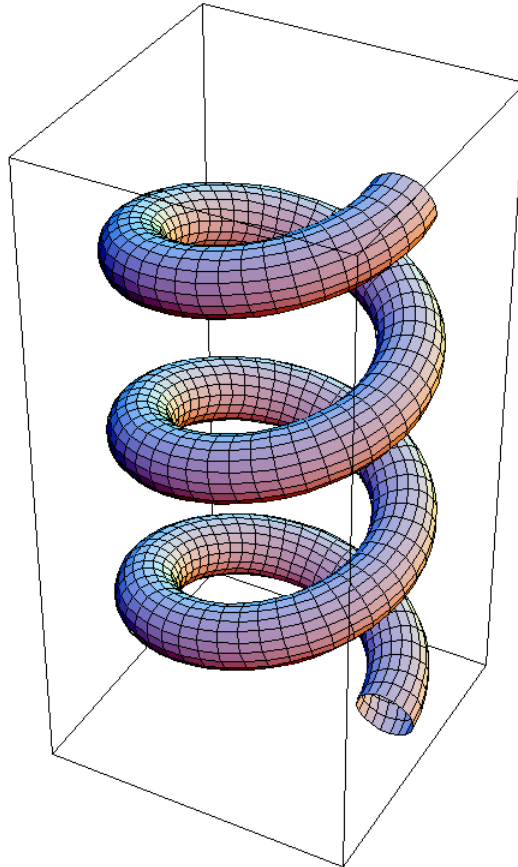
$$\theta \mapsto \cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)$$

está no plano normal à curva em $\gamma(s)$, plano este perpendicular à tangente à curva em $\gamma(s)$. Quando esta circunferência se move ao longo de γ define uma superfície, chamada *tubo* de raio $r > 0$ em torno de γ , parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + r(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)),$$

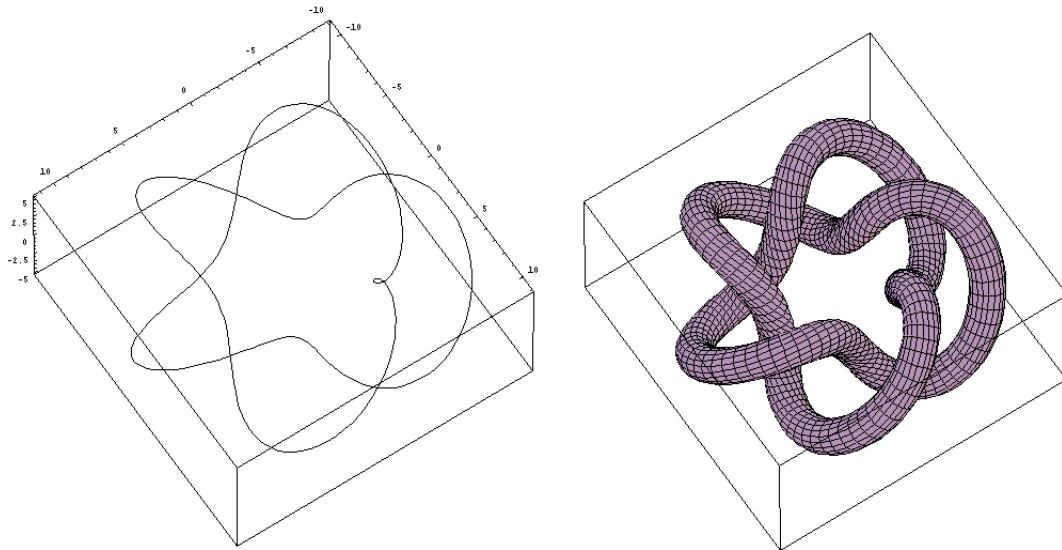
com $s \in (\alpha, \beta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ ou $s \in (\alpha, \beta)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$.

A figura seguinte mostra o tubo de raio 0.5 da hélice vertical de raio 2 e passo 0.5:



Estas superfícies têm uma propriedade interessante: o seu volume depende somente do raio r e do comprimento de γ , e não da curvatura ou da torsão de γ . Assim, tubos do mesmo raio em torno de uma circunferência e de uma hélice com o mesmo comprimento terão o mesmo volume.

A figura seguinte mostra uma curva (um nó num toro elíptico) e o respectivo tubo de raio 1.3:



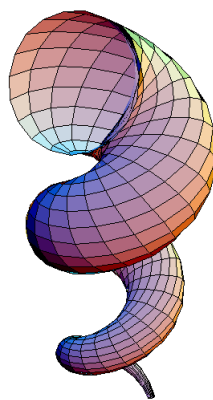
Conchas

A construção de tubos em torno de uma curva $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser facilmente modificada de modo a permitir que o raio do tubo vá variando ao longo da curva. Às superfícies definidas deste modo chamam-se *conchas* em torno de γ . Portanto uma concha pode ser parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + rs(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)),$$

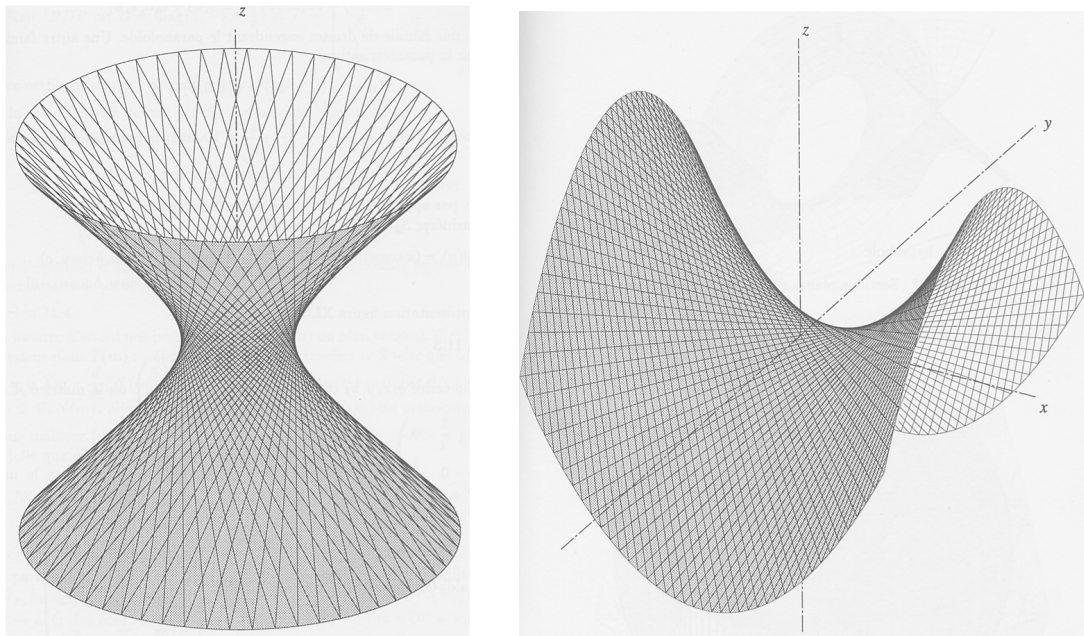
com $s \in (\alpha, \beta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ ou $s \in (\alpha, \beta)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Por exemplo, se tomarmos para γ a hélice vertical de raio 1 e passo 0.6 obtemos:

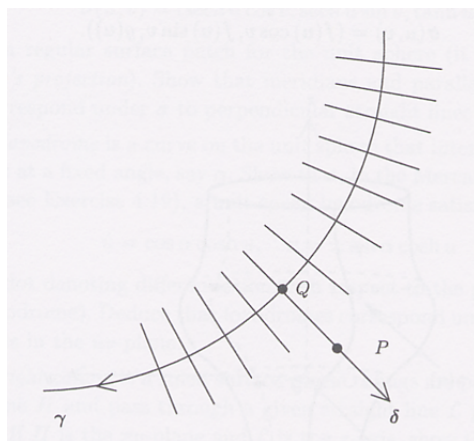


Superfícies regradas

Uma *superfície regradada* é uma superfície gerada por uma recta movendo-se ao longo de uma curva γ (chamada *directriz*). Portanto, uma superfície regradada é uma união de rectas (chamadas *rectas directoras* da superfície). São exemplos de superfícies regradadas o hiperbolóide de uma folha e o parabolóide hiperbólico (na figura seguinte) e o helicóide (Exercício 3.9).



Cada ponto P de uma superfície regrada pertence a uma recta directora, recta essa que intersecta γ num ponto $Q = \gamma(u)$. Se $\delta(u)$ denotar um vector não nulo na direcção dessa recta,



P tem como vector de posição o vector

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u), \quad (3.1.3)$$

para algum escalar v .

Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \gamma'(u) + v\delta'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \delta(u),$$

σ é regular se e só se os vectores $\gamma'(u) + v\delta'(u)$ e $\delta(u)$ são linearmente independentes. Isto será verdade, por exemplo, se $\gamma'(u)$ e $\delta(u)$ forem linearmente independentes e v for suficientemente pequeno. Portanto, para que σ seja uma parametrização e tenhamos assim uma superfície, a curva γ nunca pode ser tangente às rectas directoras.

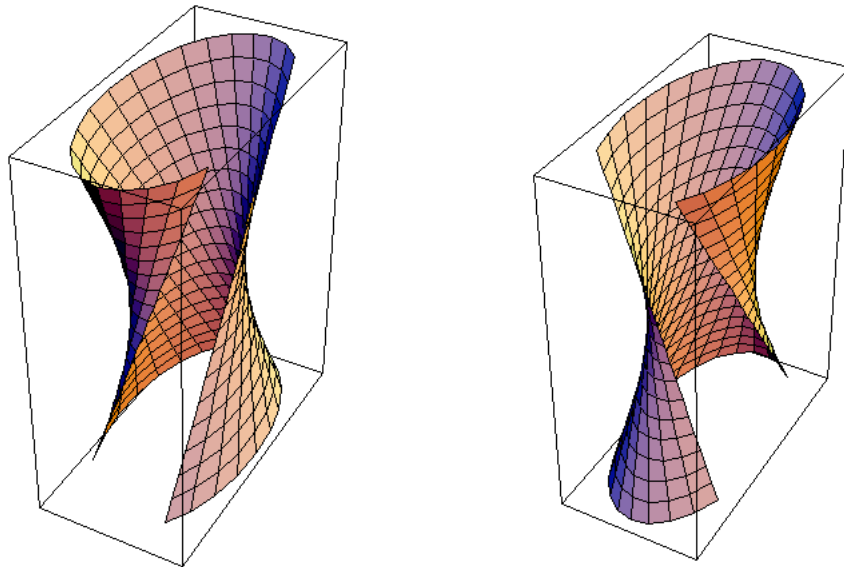
A um mapa do tipo (3.1.3) chama-se *mapa regrado*. Por vezes uma superfície regradada possui dois mapas regradados distintos. Neste caso a superfície diz-se *duplamente regradada*. É o caso do parabolóide hiperbólico ou do hiperbolóide de uma folha (na figura acima). Neste último caso, os dois mapas regradados são

$$\sigma_1(u, v) = (a(\cos u + v \sin u), b(\sin u - v \cos u), -cv)$$

e

$$\sigma_2(u, v) = (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv)$$

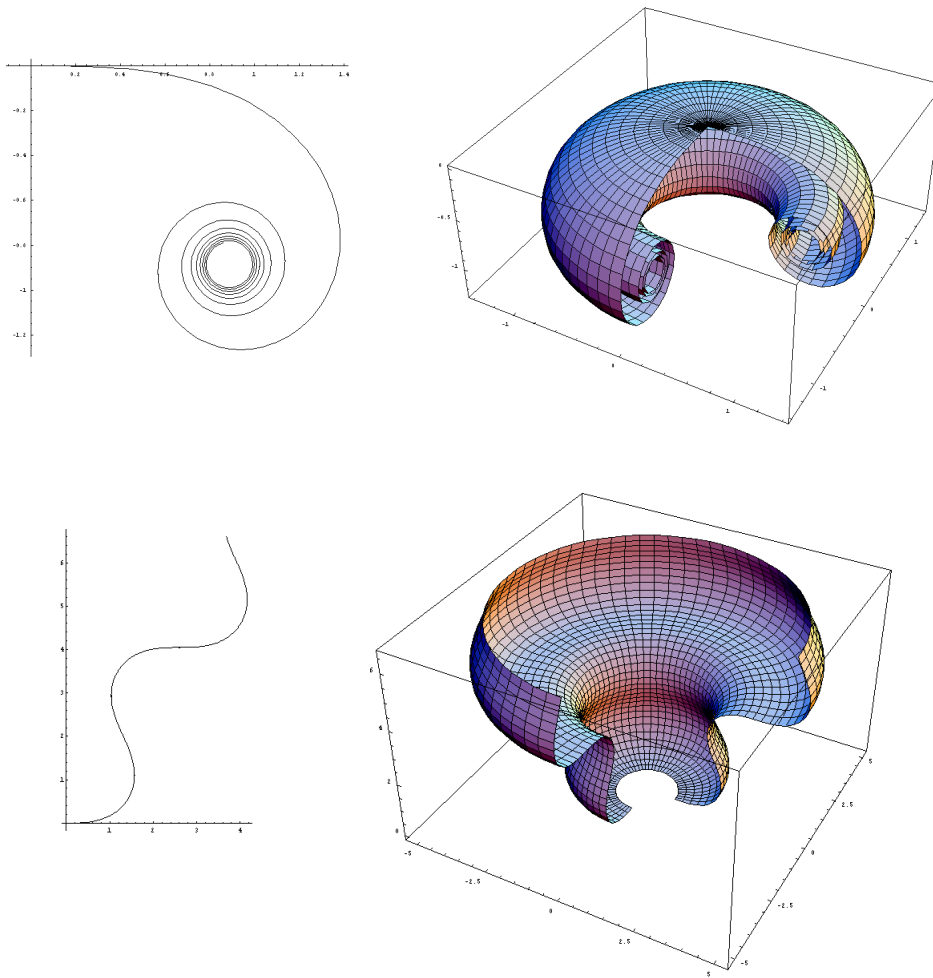
representados, na figura seguinte:



Superfícies de revolução

As superfícies de revolução formam uma das classes mais simples de superfícies não triviais.

Uma *superfície de revolução* é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma recta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução*. Por exemplo, a esfera, o toro e o parabolóide são superfícies de revolução. Um elipsóide é uma superfície de revolução quando dois dos seus eixos são iguais. As figuras seguintes mostram duas superfícies de revolução e as respectivas curvas geratriz; no primeiro caso trata-se da espiral de Cornu e no segundo caso da curva com curvatura $\kappa(s) = \sin s$ (cf. Exemplos I.4.5(2)).

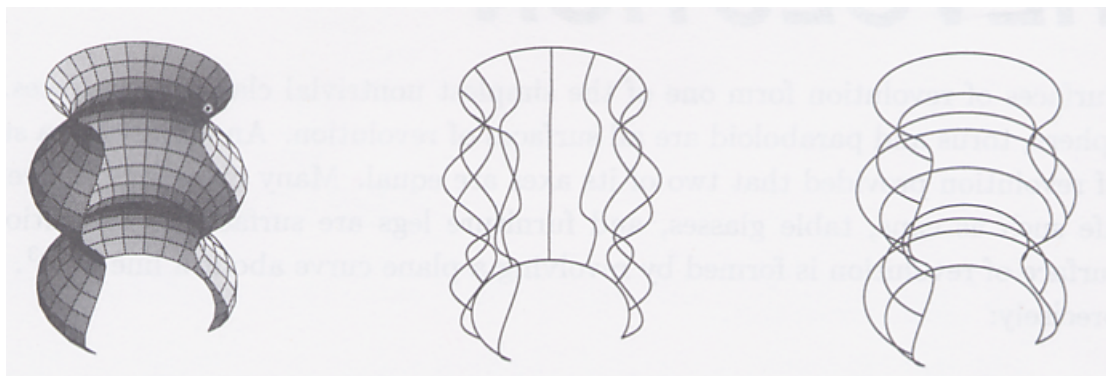


As circunferências obtidas por rotação de um ponto fixo da geratriz em torno do eixo de revolução chamam-se *paralelos* da superfície e as curvas na superfície obtidas por rotação da geratriz segundo um ângulo fixo chamam-se *meridianos*.

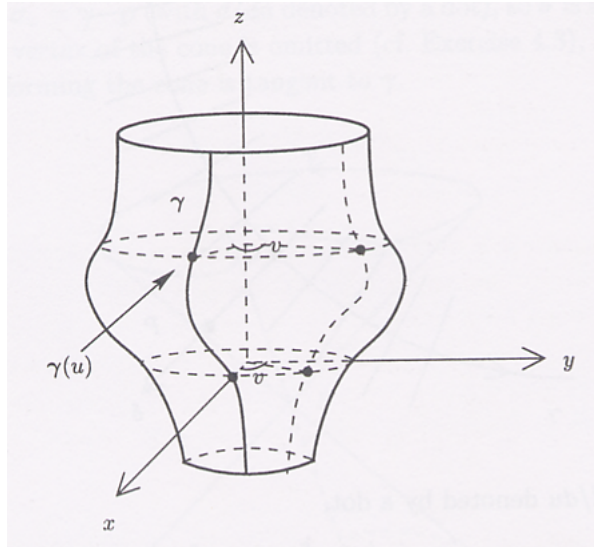
A figura seguinte mostra a superfície de revolução gerada pela curva

$$t \mapsto \left(2 + \frac{1}{2} \sin 2t, t\right),$$

com os seus meridianos e paralelos:



Fixemos para eixo de revolução o eixo OZ e para plano da geratriz o plano OXZ .



Cada ponto p da superfície é obtido por rotação, de ângulo v , de algum ponto q da geratriz. Se $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ é uma parametrização da curva geratriz, o ponto p tem vector de posição (Exercício 4.4)

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0),$$

então

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = f(u)^2 (f'(u)^2 + g'(u)^2).$$

Consequentemente, $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ nunca se anula caso $f(u)$ nunca se anule (isto é, se γ não intersecta o eixo OZ) e f' e g' nunca se anulem simultaneamente (isto é, se γ é regular). Neste caso, podemos supor que $f(u) > 0$, de modo a que $f(u)$ seja a distância de $\sigma(u, v)$ ao eixo de revolução. Então σ é injectiva desde que γ não se auto intersecte e o ângulo de rotação v varie num intervalo de amplitude $\leq 2\pi$. Nestas condições, parametrizações da forma σ formam um atlas e a superfície de revolução é, de facto, uma superfície.

Exercícios

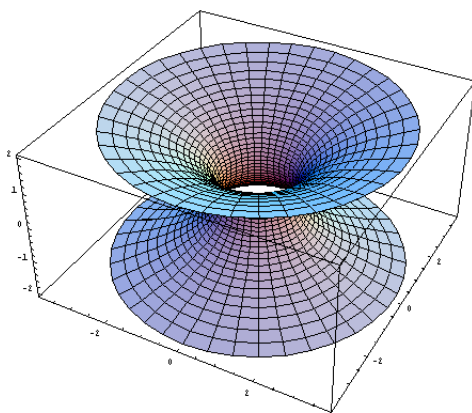
- 3.1 Determine um atlas para cada uma das superfícies quádricas (1)-(11) no Teorema 3.1 (note que, no caso (6), temos que remover a origem).
- 3.2 Mostre que a quádrica $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$ é uma superfície, exibindo um atlas.
- 3.3 Quais superfícies quádricas são regradas?

3.4 Uma *superfície de revolução* \mathcal{R} é uma superfície obtida por rotação de uma curva plana, chamada *curva geratriz*, em torno de uma recta nesse plano, a que se chama *eixo de revolução*. As circunferências obtidas por rotação de um ponto fixo da geratriz em torno do eixo de revolução chamam-se *paralelos* da superfície e as curvas na superfície obtidas por rotação da geratriz segundo um ângulo fixo chamam-se *meridianos*. Fixemos para eixo de revolução o eixo OZ e para plano da geratriz o plano OXZ . Cada ponto p de \mathcal{R} é obtido por rotação, de ângulo v , de algum ponto q da geratriz.

- Se $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ é uma parametrização da curva geratriz, mostre que o ponto p tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$.
- Verifique que σ é injectiva desde que γ não se auto intersecte e o ângulo de rotação v varie num intervalo de amplitude $\leq 2\pi$.
- Mostre que σ é regular se e só se γ é regular e não intersecta o eixo OZ .
- Conclua que, nas condições de (b) e (c), σ permite formar um atlas de \mathcal{R} .

3.5 Quais superfícies quádricas são de revolução?

3.6 A superfície obtida rodando a curva $x = \cosh z$, no plano OXZ , em torno do eixo OZ , chama-se *catenóide*. Descreva um atlas para esta superfície.



3.7 Mostre que $\sigma(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$ define um mapa da esfera (a inversa σ^{-1} é chamada *projecção de Mercator*). Verifique que meridianos e paralelos na esfera correspondem, pela projecção de Mercator, a rectas ortogonais no plano.

3.8 Uma *loxodromia* é uma curva na esfera unitária que intersecta os meridianos segundo um ângulo fixo α . Mostre que no mapa de Mercator (exercício anterior) uma loxodromia $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, parametrizada por comprimento de arco, satisfaz $u'(t) = \cos \alpha \cosh u(t)$ e $v'(t) = \pm \sin \alpha \cosh u(t)$. Deduza que as loxodromias correspondem, pela projecção de Mercator, a rectas no plano.

4. Tangentes e normais; orientabilidade

Uma maneira natural de estudar uma superfície S consiste em considerar curvas γ cujas imagens estão contidas em S .

Se a imagem de $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ está contida na imagem de um mapa $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ no atlas de S , existe uma aplicação

$$\begin{aligned} (a, b) &\rightarrow U \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)). \quad (*)$$

As funções u e v são necessariamente suaves. Reciprocamente, é óbvio que se

$$t \mapsto (u(t), v(t))$$

é suave então a equação $(*)$ define uma curva cuja imagem está em S . Em geral, se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva cuja imagem está em S e um ponto $\gamma(t_0)$ de γ é abrangido por um mapa $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S então, por continuidade, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\gamma((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)) \subseteq \sigma(U).$$

Podemos então, daqui em diante, restringir-nos a curvas da forma $(*)$. Portanto, nesta secção entenderemos por *curva em S* uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma((a, b)) \subseteq \sigma(U)$, para algum mapa $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ do atlas de S .

Definição. Um *vector tangente* a S num ponto $p \in S$ é um vector que é tangente a alguma curva em S que passa por p . Assim, v é tangente a S em p se existir uma curva γ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, para algum t_0 no domínio de γ .

Proposição 4.1. *O conjunto dos vectores tangentes a S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q).$$

Demonstração: Seja v um vector tangente a S em p e seja $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ um mapa de S contendo o ponto p . Então existe uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição

$$(a, b) \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W.$$

Denotando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\bar{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} J_\gamma(t_0) &= J_\sigma(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \\ \gamma'_3(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ v &= \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja

$$v = c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

e definamos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto q + t(c_1, c_2). \end{aligned}$$

Trata-se de uma função suave. Como é contínua em $t = 0$ e $\bar{\gamma}(0) = q \in U$, sendo U um aberto de \mathbb{R}^2 , existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{\gamma}((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq U$. Portanto, se considerarmos a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, podemos efectuar a composição com o mapa σ de S e obter uma curva $\gamma = \sigma \circ \bar{\gamma}$ em S que passa por p (pois $\gamma(0) = p$):

$$(-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{\bar{\gamma}} U \xrightarrow{\sigma} W \subseteq S.$$

Como $\gamma(0) = \sigma(\bar{\gamma}(0)) = \sigma(q) = p$, $\bar{\gamma}'_1(0) = c_1$ e $\bar{\gamma}'_2(0) = c_2$, temos

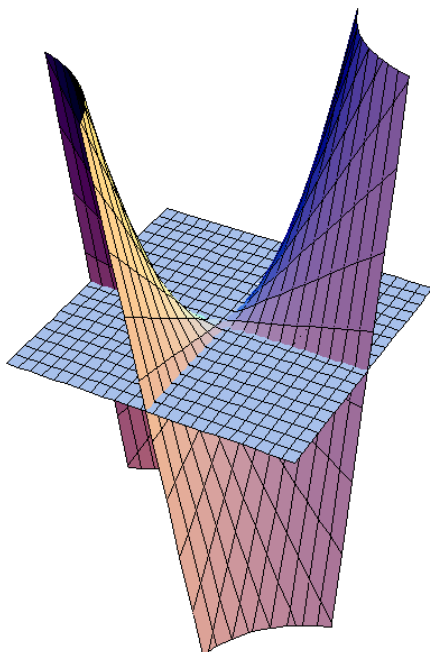
$$\begin{aligned} J_\gamma(0) &= J_\sigma(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(0) \Leftrightarrow \\ \gamma'(0) &= c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \Leftrightarrow \\ \gamma'(0) &= v \end{aligned}$$

e, portanto, v é tangente a S em p . ■

A este espaço vectorial de \mathbb{R}^3 , formado pelos vectores tangentes a S em p , chama-se *espaço tangente* de S em p . Como $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$ são linearmente independentes, o espaço tangente a S em p , habitualmente denotado por $T_p S$, tem dimensão 2. Temos assim um plano, o chamado *plano tangente* a S em p :

$$\Pi_p S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : x = p + \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \lambda_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\}.$$

A figura seguinte mostra o plano tangente ao parabolóide hiperbólico $z = xy$, na origem $(0, 0, 0)$.



$\Pi_p S$ é completamente determinado por um vector unitário a ele perpendicular, chamado *normal unitária* de S em p . Existem, como é evidente, dois vectores nessas condições. A Proposição 4.1 mostra, no entanto, que a escolha de um mapa $\sigma : U \rightarrow S$ contendo p conduz a uma escolha definitiva, nomeadamente

$$N_\sigma(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

Este vector é chamado *vector normal unitário standard*. Mas, ao contrário do plano tangente, este vector não é totalmente independente da escolha do mapa σ de S contendo p . Com efeito, seja $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow S$ outro mapa no atlas de S tal que $\tilde{\sigma}(\tilde{q}) = p$. Vimos anteriormente (na demonstração da Proposição 2.5) que

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{q}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{q}) = \det(J_\Phi(\tilde{q})) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right),$$

onde Φ denota a mudança de coordenadas $\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ de $\tilde{\sigma}$ para σ . Portanto

$$N_{\tilde{\sigma}}(p) = \frac{\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{q}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{q})}{\left\| \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x}(\tilde{q}) \wedge \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial y}(\tilde{q}) \right\|} = \pm \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|} = \pm N_\sigma(p),$$

onde o sinal é o do determinante de $J_\Phi(\tilde{q})$.

Isto conduz-nos à seguinte definição:

Definição. Uma superfície S diz-se *orientável* se possuir um atlas com a seguinte propriedade: se $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ é a mudança de coordenadas entre quaisquer dois mapas do atlas, então $\det(J_\Phi(\tilde{q})) > 0$ em qualquer ponto \tilde{q} do domínio de Φ .

Tal atlas diz-se uma *orientação* de S .

Portanto, numa superfície orientável existe uma escolha canónica da normal unitária $N(p)$, em cada ponto p , obtida tomando a normal unitária standard de cada mapa de um atlas orientado de S (escolha essa que depende suavemente de p), ou seja, existe $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, suave, tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \in (T_p S)^\perp$ para cada $p \in S$. A uma função N destas chama-se *campo de vectores normais unitários* em S .

Em conclusão:

Proposição 4.2. *Se uma superfície S é orientável então possui um campo de vectores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.* ■

O recíproco de 4.2 também é verdadeiro, mas não o provaremos. Em suma, a existência de um campo de vectores normais unitários caracteriza a orientabilidade de uma superfície.

Exemplos. (1) Qualquer superfície que admita uma parametrização global é orientável. Em particular, qualquer gráfico G_f é uma superfície orientável.

(2) Seja S uma superfície do tipo $f^{-1}(a)$ (sendo a um valor regular de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). Neste caso, para cada mapa $\sigma : U' \rightarrow W \subseteq S$, $f \circ \sigma$ é constante ($f(\sigma(x)) = a$ para cada $x \in U'$) pelo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = J_f(p) \cdot J_\sigma(q)$$

para cada $p = \sigma(q) \in W$. Consequentemente, como $J_f(p) = \nabla f(p)$,

$$(\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)) = 0 \quad \text{e} \quad (\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)) = 0.$$

Portanto, $\nabla f(p) \in (T_p S)^\perp$ e

$$\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

é uma boa escolha para $N(p)$ pois define um campo de vectores normais unitários em S . Podemos então concluir que toda a superfície deste tipo (como, por exemplo, o toro, o elipsóide, os hiperbolóides, etc.) é orientável.

Isto também mostra que neste tipo de superfícies podemos determinar o plano tangente em qualquer ponto sem precisar de conhecer nenhum mapa da superfície contendo esse ponto. Com efeito, como

$$\left(\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)\right) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\right) = 0,$$

então

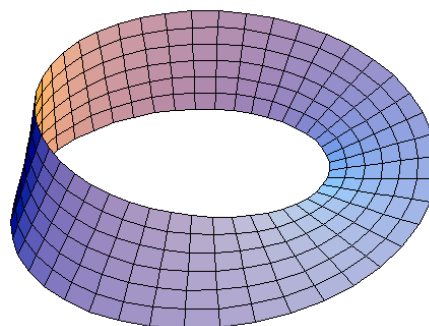
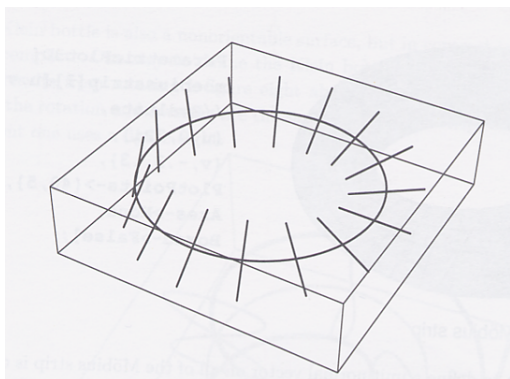
$$T_p S = \langle \nabla f(p) \rangle^\perp$$

e

$$\Pi_p S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p \mid \nabla f(p)) = 0\}.$$

(3) Todos os exemplos de superfícies que vimos até ao momento são superfícies orientáveis. Vejamos agora um exemplo de uma superfície que não é orientável.

A *fita de Möbius* \mathcal{M} é a superfície que se obtém rodando um segmento de recta \mathcal{L} em torno do seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência \mathcal{C} , de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência \mathcal{C} , \mathcal{L} dá meia volta em torno de P .



Se tomarmos para \mathcal{C} a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano OXY e para \mathcal{L} o segmento de comprimento 1 paralelo ao eixo OZ e com ponto médio $P = (1, 0, 0)$ então, após P ter rodado θ radianos em torno de OZ , \mathcal{L} terá rodado $\theta/2$ radianos em torno de P (no plano contendo P e o eixo OZ). O ponto de \mathcal{L} inicialmente em $(1, 0, t)$ estará então, após essa rotação de ângulo θ , no ponto

$$\sigma(t, \theta) = \left((1 - t \sin \frac{\theta}{2}) \cos \theta, (1 - t \sin \frac{\theta}{2}) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

Consideremos para domínio de σ o aberto

$$U = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Podemos definir um segundo mapa $\tilde{\sigma}$ pela mesma fórmula de σ mas com domínio

$$\tilde{U} = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, -\pi < \theta < \pi\}.$$

Estes dois mapas formam um atlas de \mathcal{M} (Exercício 3.10), pelo que a fita de Möbius é uma superfície.

Calculemos a normal unitária standard N_σ em pontos da circunferência \mathcal{C} (onde $t = 0$). Em tais pontos $p = \sigma(0, \theta)$, temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, \theta) = \left(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(0, \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

pelo que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(0, \theta) = \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Trata-se de um vector unitário, pelo que é igual a $N_\sigma(p)$.

Se a fita de Möbius fosse orientável, existiria um campo de vectores normais unitários em \mathcal{M} , $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, variando suavemente em \mathcal{M} . Num ponto $p = \sigma(0, \theta)$ de \mathcal{C} , teríamos

$$N(p) = \lambda(\theta)N_\sigma(p),$$

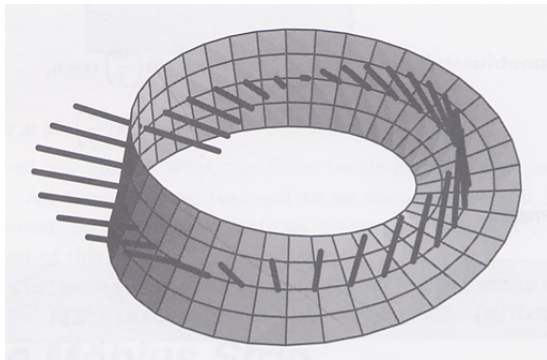
onde $\lambda : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $\lambda(\theta) = \pm 1$ para qualquer θ . Consequentemente, $\lambda(\theta) = 1$ para qualquer $\theta \in (0, 2\pi)$, ou $\lambda(\theta) = -1$ para qualquer $\theta \in (0, 2\pi)$. Substituindo $N(p)$ por $-N(p)$ no caso em que $\lambda(\theta) = -1$, podemos assumir que $\lambda(\theta)$ é sempre 1. Então, no ponto $p_0 = \sigma(0, 0) = \sigma(0, 2\pi)$, como N é suave, teremos que ter

$$N(p_0) = \lim_{\theta \downarrow 0} N_\sigma(p) = \lim_{\theta \downarrow 0} \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) = (-1, 0, 0)$$

e também

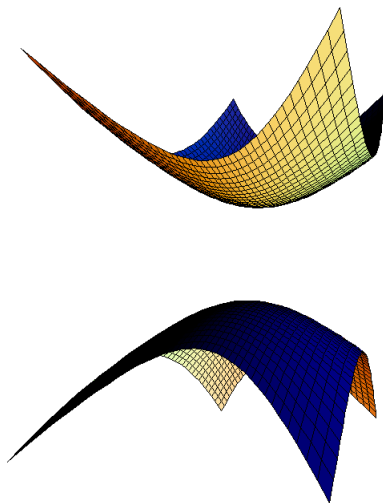
$$N(p_0) = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} N_\sigma(p) = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) = (1, 0, 0).$$

Esta contradição mostra que a fita de Möbius não é orientável.

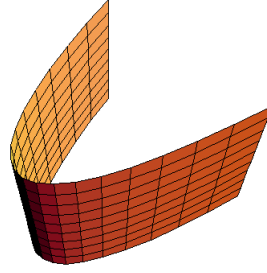


Exercícios

- 4.1 Considere o cone $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$. Prove, usando a definição, que se trata de uma superfície. Mostre que \mathcal{S} tem o mesmo plano tangente nos pontos pertencentes à recta $x = 0, y = z$.
- 4.2 Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2y^2$.
- Determine o conjunto dos valores regulares de f .
 - Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 = c\}$, $c \in \mathbb{R}^+$. Prove que qualquer plano tangente a \mathcal{S} é paralelo à recta $x = 1, y = 2$.
- 4.3 Considere o hiperbolóide de duas folhas $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$.



- Justifique que \mathcal{H} é uma superfície.
 - Determine os pontos de \mathcal{H} nos quais o plano tangente é paralelo ao eixo OZ .
- 4.4 Considere a superfície $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin x \sin y \sin(x+y)\}$. Determine os pontos de \mathcal{S} nos quais o plano tangente é paralelo ao plano de equação $z = 0$.
- 4.5 Considere a superfície $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + 3xy^2\}$. Mostre que existem pontos de \mathcal{S} para os dois lados do plano tangente a \mathcal{S} em $(0, 0, 0)$.
- 4.6 Considere o cilindro parabólico $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$.



- (a) Prove que \mathcal{S} é uma superfície que pode ser coberta por uma parametrização.
 (b) Determine a recta normal a \mathcal{S} em $(0, 0, 0)$.

4.7 Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{e^x}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0)\}$. Determine uma equação para o plano tangente a \mathcal{S} em $(0, 1, 1)$. Verifique se $(1, 1, 0)$ pertence à recta normal a \mathcal{S} em $(0, 1, 1)$.

4.8 Considere o *cilindro elíptico* $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1\}$, com $p, q \neq 0$, constantes.

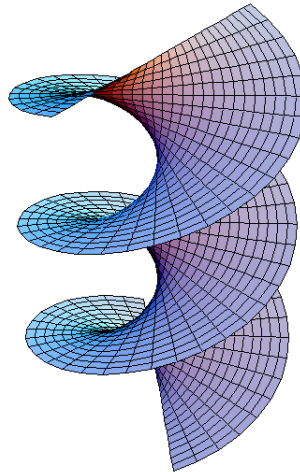
- (a) Prove que o plano tangente a \mathcal{S} nos pontos da recta

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0, \frac{x_0^2}{p^2} + \frac{y_0^2}{q^2} = 1\}$$

permanece constante.

- (b) Mostre que qualquer normal a \mathcal{S} é paralela ao plano de equação $z = 0$.

4.9 Um *helicóide* é a superfície descrita por uma hélice de avião quando, quer o avião quer a hélice, se movem com velocidade constante. Portanto, um helicóide é a superfície gerada por um segmento de recta, que roda a velocidade constante em torno de um eixo a ele perpendicular, enquanto simultaneamente se move ao longo desse eixo com velocidade constante.



Se o avião estiver a voar ao longo do eixo OZ , mostre que o helicóide pode ser parametrizado por $\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$, onde λ é uma constante. Mostre ainda que a co-tangente do ângulo que a normal unitária de ϕ num ponto P faz com o eixo OZ é proporcional à distância de P ao eixo.

4.10 A *fita de Möbius* \mathcal{M} é a superfície que se obtém rodando um segmento de recta \mathcal{L} em torno do seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência \mathcal{C} ,

de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência \mathcal{C} , \mathcal{L} dá meia volta em torno de P . Se tomarmos para \mathcal{C} a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano OXY e para \mathcal{L} o segmento de comprimento 1 paralelo ao eixo OZ e com ponto médio $P = (1, 0, 0)$ então, após P ter rodado θ radianos em torno de OZ , \mathcal{L} terá rodado $\theta/2$ radianos em torno de P (no plano contendo P e o eixo OZ).

- (a) Mostre que o ponto de \mathcal{L} inicialmente em $(1, 0, t)$ estará, após essa rotação de ângulo θ , no ponto

$$\sigma(t, \theta) = \left((1 - t \sin \frac{\theta}{2}) \cos \theta, (1 - t \sin \frac{\theta}{2}) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (*)$$

- (b) Tome para domínio de σ o aberto $U = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, 0 < \theta < 2\pi\}$. Sendo $\tilde{U} = \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2, -\pi < \theta < \pi\}$, considere $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{M}$ também definida por (*). Mostre que σ e $\tilde{\sigma}$ formam um atlas de \mathcal{M} .
- (c) Mostre que $N_\sigma(p)$, para $p = \sigma(0, \theta)$, é igual a $(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2})$.
- (d) Verifique que $\lim_{\theta \downarrow 0} N_\sigma(p) = (-1, 0, 0)$ e $\lim_{\theta \uparrow 2\pi} N_\sigma(p) = (1, 0, 0)$.
(Isto mostra que a fita de Möbius não é orientável.)

4.11 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva plana cuja imagem está contida em

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z > 0\}$$

e seja S a superfície de revolução obtida rodando γ em torno do eixo OY . Sendo

$$\begin{aligned} \alpha : J &\longrightarrow \gamma(I) \\ t &\longmapsto (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t)). \end{aligned}$$

uma curva com velocidade constante, considere:

- para cada $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha_\theta : J &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (\alpha_2(t), \alpha_3(t) \cos \theta, \alpha_3(t) \sin \theta); \end{aligned}$$

- para cada $t \in J$,

$$\begin{aligned} \beta_t : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ \theta &\longmapsto (\alpha_2(t), \alpha_3(t) \cos \theta, \alpha_3(t) \sin \theta). \end{aligned}$$

As curvas α_θ chamam-se *meridianos* de S , e as circunferências β_t chamam-se *paralelos* de S (recorde o que vimos na secção anterior sobre as superfícies de revolução).

- (a) Mostre que os meridianos e os paralelos se intersectam sempre ortogonalmente, isto é, $(\alpha'_\theta(t) \mid \beta'_t(\theta)) = 0$ para quaisquer $t \in J, \theta \in \mathbb{R}$.
- (b) Sabendo que uma *geodésica* de uma superfície S é uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^\perp$ para todo o $t \in I$, prove que:
- Cada meridiano α_θ é uma geodésica da superfície de revolução S acima definida.
 - Um paralelo β_t é uma geodésica se e só se $\alpha'_3(t) = 0$.

5. Primeira forma fundamental

A primeira coisa que um habitante de uma superfície, com alguma curiosidade pela geometria, talvez queira saber é como medir a distância entre dois pontos da superfície. Evidentemente, esta distância será, em geral, diferente da distância medida por um habitante do espaço tridimensional pois o segmento de recta que dá o caminho mais curto entre dois pontos de \mathbb{R}^3 não está, em geral, contido na superfície.

Nesta secção estudaremos o instrumento que nos permite calcular comprimentos, ângulos e áreas numa superfície: a primeira forma fundamental da superfície.

Se $\gamma(t) = \sigma(x(t), y(t))$ define uma curva numa superfície S , totalmente descrita por um mapa σ , o comprimento do arco de γ desde $\gamma(t_0)$ até $\gamma(t_1)$ é dado por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Mas, pelo Teorema da Função Composta,

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \left(x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \\ &= x'(t)^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + 2x'(t)y'(t) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) + y'(t)^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Denotando

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right), \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right)$$

por, respectivamente, $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$ (ou, abreviadamente, E , F e G), podemos escrever

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left(Ex'(t)^2 + 2Fx'(t)y'(t) + Gy'(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

A matriz

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

é a matriz da chamada *primeira forma fundamental* do mapa σ de S em $p = \sigma(q)$, ou seja, da forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto (v \mid w). \end{aligned}$$

De facto, se

$$v = v_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + v_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \quad \text{e} \quad w = w_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + w_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

então

$$\begin{aligned}(v | w) &= v_1 w_1 E(q) + v_1 w_2 F(q) + v_2 w_1 F(q) + v_2 w_2 G(q) \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Daqui em diante cometeremos o abuso de linguagem de chamar primeira forma fundamental de σ em p aos escalares $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$.

Exemplos 5.1. (1) Para o plano parametrizado por $\sigma(x, y) = p + xu + yv$ (ou seja, o plano que passa por um dado ponto p e tem a direcção dos vectores u e v , unitários, ortogonais) $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = u$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = v$. Assim, $E(x, y) = (u | u) = \|u\|^2 = 1$, $G(x, y) = \|v\|^2 = 1$ e $F(x, y) = (u | v) = 0$.

(2) O cilindro circular vertical, parametrizado por $\sigma(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$, tem como primeira forma fundamental $E(x, y) = 1$, $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 1$, tal como o plano.

(3) Para a parametrização da esfera em termos da latitude e longitude,

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta),$$

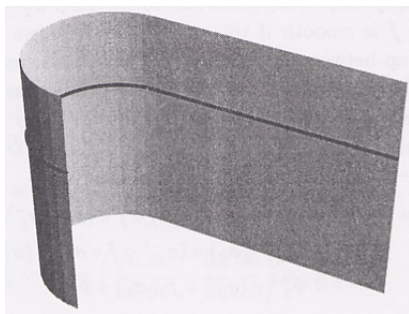
$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0)$. Portanto a primeira forma fundamental é $E(\theta, \varphi) = 1$, $F(\theta, \varphi) = 0$ e $G(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta$. Isto quer dizer que o comprimento, de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, de qualquer curva na esfera, dada por

$$\gamma(t) = \left(\cos u(t) \cos v(t), \cos u(t) \sin v(t), \sin u(t) \right),$$

é igual a

$$\int_{t_0}^{t_1} (u'(t)^2 + \cos^2 \theta v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Nos exemplos (1) e (2) acima, a primeira forma fundamental é a mesma. A justificação geométrica para isto é a seguinte: uma folha de papel plana pode ser enrolada num cilindro, de modo óbvio, sem deformação;



se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada torna-se uma curva no cilindro e, como não houve deformação, os comprimentos de ambas as curvas coincidem. O mesmo já não se passa com a esfera e o plano.

Este tipo de questão geométrica pode ser abordada com o auxílio do cálculo diferencial sobre uma superfície apresentado no final da Secção 2. Com efeito, a transformação geométrica do plano no cilindro que referimos acima é um difeomorfismo especial, como veremos em seguida.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma *isometria* se, para cada curva γ em S_1 , a curva $f \circ \gamma$ em S_2 tem comprimento igual ao de γ . Se existir uma isometria $f : S_1 \rightarrow S_2$, diz-se que S_1 e S_2 são superfícies *isométricas*.

Teorema 5.2. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada mapa σ_1 de um atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são idênticas.*

Demonstração: Como o comprimento de uma curva em S pode ser calculado como a soma dos comprimentos dos arcos de curva em que cada um é descrito por um único mapa do atlas de S , podemos supor que S_1 e S_2 estão descritos por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ um mapa global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ o correspondente mapa de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente.

“ \Leftarrow ”: Se $E_1 = E_2, F_1 = F_2$ e $G_1 = G_2$ e $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ define uma curva arbitrária em S_1 , o comprimento de γ de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, isto é, o integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

é evidentemente igual ao comprimento da curva $\sigma_2(u(t), v(t)) = f \circ \sigma_1(u(t), v(t)) = f \circ \gamma(t)$, de $f(\gamma(t_0))$ a $f(\gamma(t_1))$.

“ \Rightarrow ”: Reciprocamente, se f é uma isometria então, qualquer que seja a curva $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ em S_1 de domínio $I = (\alpha, \beta)$, a curva $f \circ \gamma(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ tem o mesmo comprimento. Portanto, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Isto implica que

$$E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2 = E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2 \quad (5.2.1)$$

para qualquer $t \in I$. Fixemos $t_0 \in I$ e sejam $u_0 = u(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$. Então:

- É evidente que existe um sub-intervalo J de I contendo t_0 tal que, para cada $t \in J$, $(u_0 + t - t_0, v_0) \in U$. Logo $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_0 + t - t_0, v_0)$ define uma curva $\gamma_1 : J \rightarrow S_1$. Para esta curva particular, a igualdade (5.2.1) diz-nos que $E_1 = E_2$, pois neste caso $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$.

- Analogamente, podemos considerar a curva γ_2 definida por $\gamma_2(t) = \sigma_1(u_0, v_0 + t - t_0)$. Neste caso $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$ pelo que, por (5.2.1), $G_1 = G_2$.
- Finalmente, considerando a curva γ_3 dada por $\gamma_3(t) = (u_0 + t - t_0, v_0 + t - t_0)$, podemos concluir que $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, donde $F_1 = F_2$. ■

Exemplo. Seja S_1 a fita infinita no plano OYZ dada por $0 < y < 2\pi$ e seja S_2 o cilindro circular vertical dado por $x^2 + y^2 = 1$, com excepção dos pontos da recta $x = 1, y = 0$. Então, S_1 é coberto pela parametrização global $\sigma_1(u, v) = (0, u, v)$, e S_2 por $\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ em ambos os casos. A função $f : S_1 \rightarrow S_2$ que aplica $\sigma_1(u, v)$ em $\sigma_2(u, v)$ é uma isometria pois, como vimos nos Exemplos 5.1, σ_1 e σ_2 têm a mesma primeira forma fundamental.

Um argumento análogo também mostra que uma parte do cone circular é isométrica a parte do plano. Isto tudo generaliza-se de forma óbvia a cilindros e cones generalizados.

Vejam agora a questão da medição de ângulos numa superfície.

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas, numa superfície S , que se intersectam num dado ponto $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. Então $\gamma_1(t) = \sigma(u_1(t), v_1(t))$ e $\gamma_2(t) = \sigma(u_2(t), v_2(t))$. O ângulo de intersecção, no ponto p , das curvas γ_1 e γ_2 é definido como sendo o ângulo θ formado pelos vectores $\gamma_1'(t_1)$ e $\gamma_2'(t_2)$. Portanto

$$\cos \theta = \frac{(\gamma_1'(t_1) | \gamma_2'(t_2))}{\|\gamma_1'(t_1)\| \|\gamma_2'(t_2)\|}.$$

Mas

$$\gamma_1'(t_1) = u_1'(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_1(t_1), v_1(t_1)) + v_1'(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_1(t_1), v_1(t_1))$$

e

$$\gamma_2'(t_2) = u_2'(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_2(t_2), v_2(t_2)) + v_2'(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_2(t_2), v_2(t_2)),$$

pelo que $(\gamma_1'(t_1) | \gamma_2'(t_2)) = Eu_1'(t_1)u_2'(t_2) + F(u_1'(t_1)v_2'(t_2) + v_1'(t_1)u_2'(t_2)) + Gv_1'(t_1)v_2'(t_2)$ e, conseqüentemente,

$$\cos \theta = \frac{Eu_1'(t_1)u_2'(t_2) + F(u_1'(t_1)v_2'(t_2) + v_1'(t_1)u_2'(t_2)) + Gv_1'(t_1)v_2'(t_2)}{(Eu_1'(t_1)^2 + 2Fu_1'(t_1)v_1'(t_1) + Gv_1'(t_1)^2)^{\frac{1}{2}}(Eu_2'(t_2)^2 + 2Fu_2'(t_2)v_2'(t_2) + Gv_2'(t_2)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ou, abreviadamente,

$$\cos \theta = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + v_1'u_2') + Gv_1'v_2'}{(Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2)^{\frac{1}{2}}(Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.2.2)$$

Exemplo. Dada uma parametrização $\sigma : U \rightarrow S$ duma superfície S , $\gamma_1(t) = \sigma(a, t)$ e $\gamma_2(t) = \sigma(t, b)$ (a e b constantes adequadas) definem duas curvas em S , chamadas *curvas paramétricas*. Estas curvas intersectam-se no ponto $\sigma(a, b)$ da superfície. Então, pela fórmula (5.2.2), o ângulo de intersecção θ é igual a

$$\arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Portanto, θ é igual a $\pi/2$ (diz-se neste caso que a parametrização é *ortogonal*) exactamente quando $F = 0$.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *conformal* se, para quaisquer curvas γ_1 e γ_2 em S_1 que se intersectam, o ângulo de intersecção das curvas $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ em S_2 é igual ao ângulo de intersecção de γ_1 e γ_2 .

Teorema 5.3. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é conformal se e só se, para cada mapa σ_1 dum atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são proporcionais, ou seja, $E_2 = \lambda E_1, F_2 = \lambda F_1$ e $G_2 = \lambda G_1$ para alguma função suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: É, em termos gerais, análoga à demonstração do teorema anterior mas mais longa e exigente no cálculo. Por estas razões omitimo-la. ■

Exemplos. (1) Toda a isometria é conformal. O recíproco não é verdadeiro, como veremos já de seguida.

(2) Consideremos a esfera unitária definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e recordemos a projecção estereográfica

$$\begin{aligned} \sigma_N^{-1} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Provemos que, vista como uma aplicação de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ no plano horizontal $z = 0$, ou seja, como

$$\begin{aligned} f : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right) \end{aligned}$$

é conformal. Para isso consideremos a parametrização global

$$\sigma_N(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Os coeficientes da respectiva primeira forma fundamental são

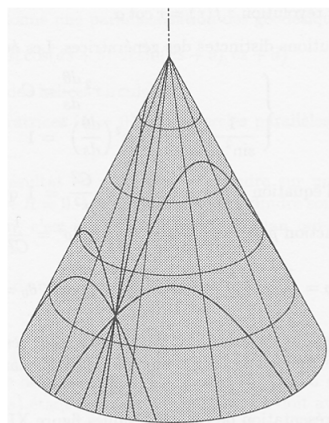
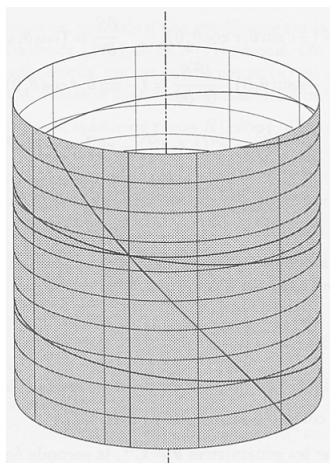
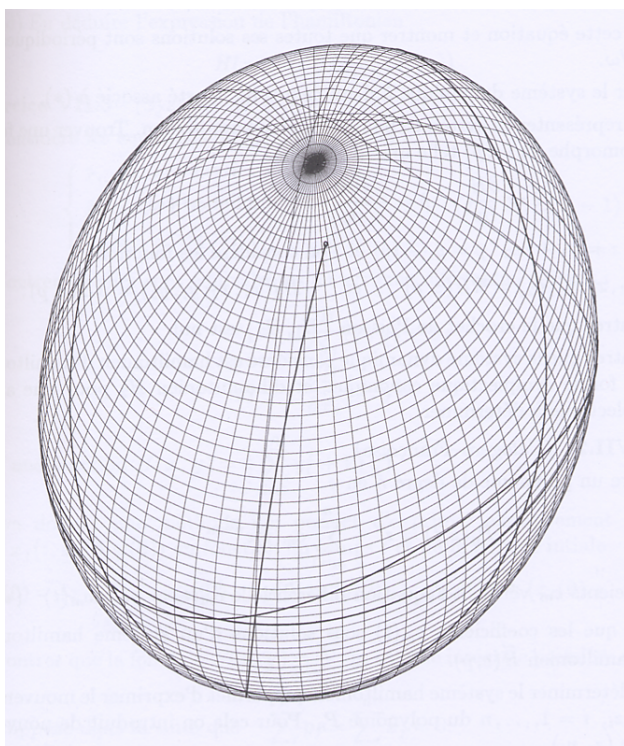
$$E_1(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad F_1(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad G_1(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por outro lado, como a primeira forma fundamental do mapa $f \circ \sigma_N(x, y) = (x, y, 0)$ do plano horizontal é $E_2(x, y) = 1, F_2(x, y) = 0$ e $G_2(x, y) = 1$, podemos concluir que

$$E_1(x, y) = \lambda(x, y)E_2(x, y), \quad F_1(x, y) = \lambda(x, y)F_2(x, y) \quad \text{e} \quad G_1(x, y) = \lambda(x, y)G_2(x, y)$$

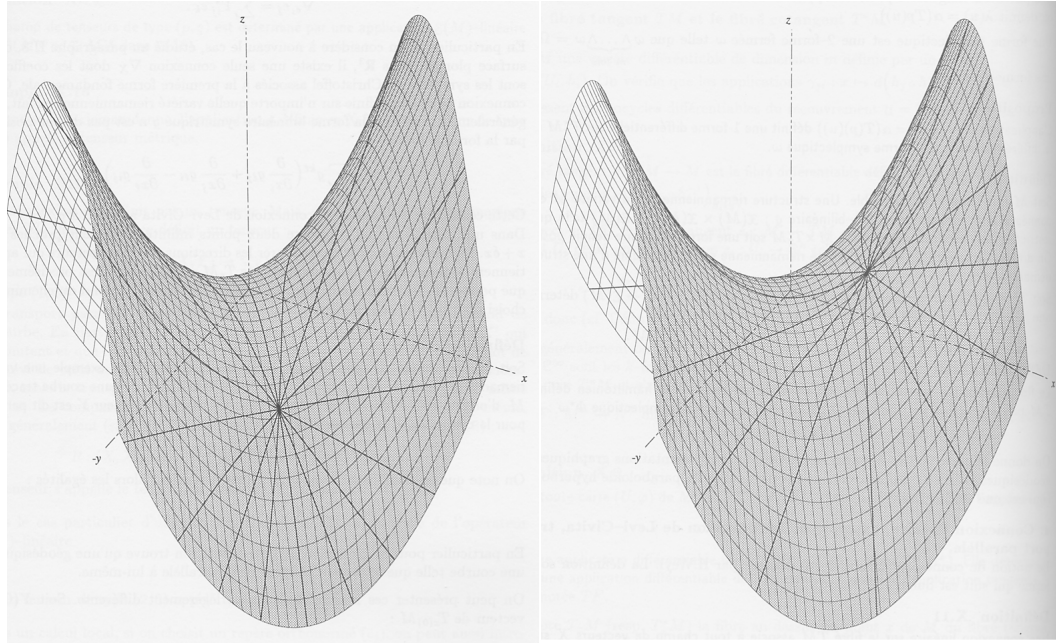
para $\lambda(x, y) = 4/(x^2 + y^2 + 1)^2$. Logo f é conformal. É pois um exemplo duma aplicação conformal que não é uma isometria.

Fixados dois pontos A, B sobre uma superfície S , chama-se *arco geodésico* de extremos A, B sobre S a uma curva em S , desde A até B , que tenha comprimento mínimo em relação a qualquer outra nas mesmas condições. Dá-se o nome de *geodésica* de S a toda a curva γ nesta superfície que contenha um arco geodésico para cada par de pontos de γ (cf. Exercício 4.11). Por exemplo, no plano as geodésicas são evidentemente as rectas, enquanto na esfera as geodésicas são circunferências de círculo máximo. Noutras superfícies, a determinação das geodésicas é mais complicada. Por exemplo, as figuras seguintes mostram uma geodésica do elipsóide $(1/5)x^2 + (2/5)y^2 + z^2 = 1$, a partir do ponto de coordenadas $x = 3/5, y = 1/5$ (utilizamos um traço mais fino quando a geodésica passa pela parte de trás do elipsóide) e geodésicas sobre um cilindro e um cone de revolução:



A figura seguinte mostra algumas geodésicas do parabolóide hiperbólico $z = xy$ a

partir, respectivamente, do ponto $(5, -5, -25)$ e do ponto $(5, 2, 10)$ (observe que, entre elas, em cada caso, se encontram duas rectas):



As geodésicas e os mapas conformais têm obviamente um grande interesse em cartografia e navegação. Por exemplo, numa viagem marítima é natural que se procure seguir o caminho mais curto, ou seja, o arco *geodésico*, para não se perder tempo inutilmente (tal é o objectivo da chamada navegação *ortodrómica*). Todavia, este objectivo nunca pode, por diversas razões, ser totalmente atingido na prática. Frequentemente há conveniência em que o rumo se mantenha constante, isto é, que o eixo do barco forme sempre um mesmo ângulo com a linha Norte-Sul; nesta situação, o barco irá descrevendo sobre o mar uma curva que corta os meridianos segundo um ângulo constante (os mapas conformais têm assim um grande interesse); mas sucede que esta curva — chamada *loxodromia* — não é uma geodésica (por exemplo, se o barco se deslocar na direcção Este-Oeste, a linha descrita será um paralelo, que não é em geral um arco de círculo máximo). A navegação loxodrómica pode contudo ser utilizada em trajectos curtos porque então a loxodromia não se afasta muito da geodésica. Para trajectos mais longos, convirá usar uma curva composta de arcos de loxodromia, inscrita no arco geodésico.

Consideremos de novo a projecção estereográfica da esfera sobre o plano. Trata-se, como vimos, duma representação planar conformal da esfera; as imagens dos meridianos serão rectas que passam pelo centro C da esfera e as imagens dos paralelos serão circunferências de centro C ; uma loxodromia irá pois projectar-se numa curva *isógona* (isto é, que mantém o mesmo ângulo) relativamente às rectas que passam por C , ou seja, uma espiral logarítmica. Todavia, para a navegação, o ideal será encontrar um mapa conformal da esfera no qual as imagens dos meridianos sejam rectas paralelas entre si, pois que, nesse caso, a imagem da loxodromia será manifestamente uma recta. Isto foi primeiramente observado e estudado pelo matemático português Pedro Nunes

(1502-1578). Um tal mapa foi depois concebido em 1569 por Mercator. A projecção de Mercator (veja os Exercícios 3.7 e 3.8) é utilizada em muitos mapas terrestres e apresenta apenas o inconveniente de, sendo os pólos afastados para distância infinita do equador, as regiões próximas dos pólos aparecerem excessivamente dilatadas e deformadas.

O interesse das aplicações conformais não se limita de maneira nenhuma à cartografia. Trata-se de um dos assuntos mais importantes da Análise moderna.

É também possível deduzir uma fórmula que permite calcular a área $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ duma região $\mathcal{R} \subseteq S$, contida num mapa $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$, a partir da primeira forma fundamental. Com efeito, pode provar-se que

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int \int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy$$

e, como

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\|^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 = EG - F^2,$$

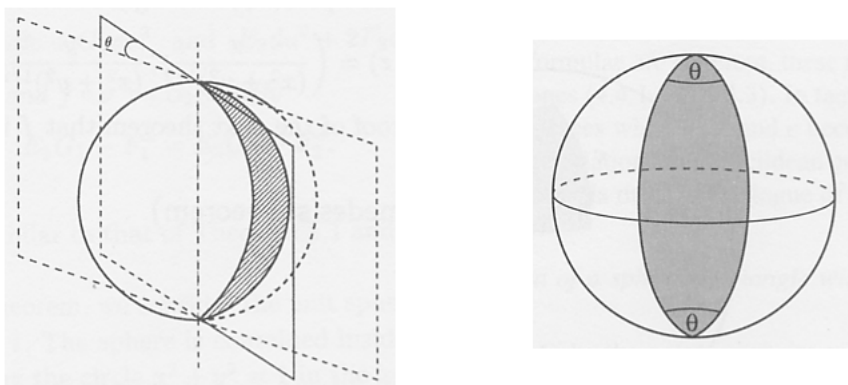
$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int \int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Note que, por σ ser regular,

$$EG - F^2 > 0 \tag{5.3.1}$$

em qualquer ponto.

Exemplo 5.4. Determinemos a área dum *fuso* numa esfera de raio r , isto é, a região compreendida entre dois arcos de círculo máximo com ângulo de intersecção θ :



É claro que podemos assumir que as circunferências de círculo máximo se intersectam nos pólos (são pois meridianos), porque podemos sempre por uma rotação da esfera — o que não altera as áreas, pois a aplicação dum movimento rígido a uma superfície não altera a primeira forma fundamental — chegar a esta situação.

Para calcular a área observemos (recorde o Exemplo 5.1(3)) que, para o mapa

$$\sigma(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

$EG - F^2 = r^4 \cos^2 u$. Então a área do fuso é igual a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\theta r^2 \cos u \, du \, dv = 2\theta r^2.$$

Em particular, para $\theta = 2\pi$ obtemos o valor da área da esfera, ou seja, $4\pi r^2$.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *equiareal* se aplica cada região de S_1 numa região de S_2 com igual área.

Teorema 5.5. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada mapa σ_1 dum atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e de $f \circ \sigma_1$ satisfazem*

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Demonstração: Como a área duma região em S pode ser calculada como soma de áreas de sub-regiões em que cada sub-região é descrita por um único mapa do atlas de S , podemos supor que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ um mapa global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ o correspondente mapa de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada região \mathcal{R} de S_1 ,

$$\int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \int \int_{(f \circ \sigma_1)^{-1}(f(\mathcal{R}))} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy,$$

ou seja,

$$\int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy.$$

Isto equivale a dizer que

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2},$$

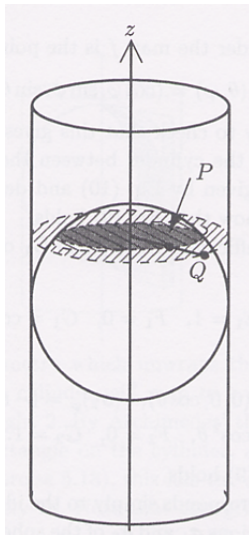
isto é,

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2,$$

pois $E_1 G_1 - F_1^2, E_2 G_2 - F_2^2 > 0$. ■

Exemplos. (1) Toda a isometria é equiareal. O recíproco não é verdadeiro, como veremos no exemplo seguinte.

(2) Consideremos a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto Q$, da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P .



Para determinarmos uma fórmula para f , sejam (x, y, z) as coordenadas cartesianas de P e (X, Y, Z) as de Q . Como o segmento PQ é paralelo ao plano XOY , temos $Z = z$ e $(X, Y) = \lambda(x, y)$ para algum escalar λ . Mas (X, Y, Z) está no cilindro logo $1 = X^2 + Y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$ e, conseqüentemente, $\lambda = \pm(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Tomando o sinal + obtemos o ponto Q logo

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, z \right).$$

Teorema 5.6. [Teorema de Arquimedes] *A aplicação f é equiareal.*

Demonstração: Seja S_1 a esfera menos os pólos norte e sul, com o atlas consistindo nas duas parametrizações definidas por $\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ nos abertos $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2, -\pi < \varphi < \pi\}$. A imagem de $\sigma_1(\theta, \varphi)$ por f é o ponto

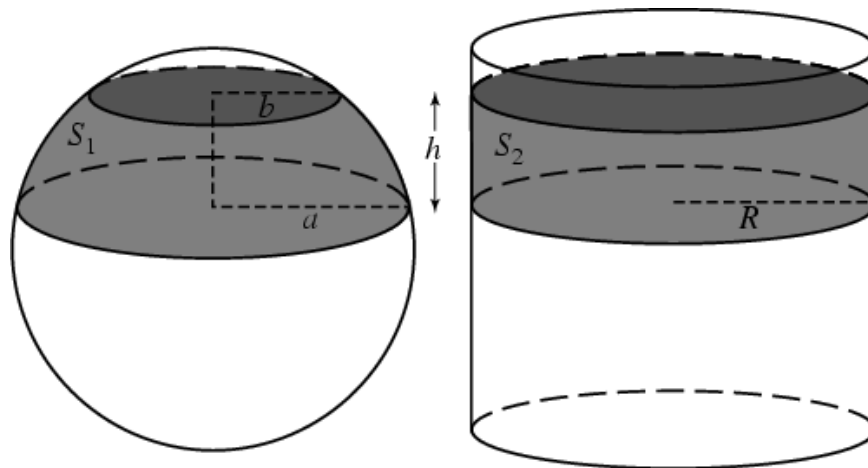
$$\sigma_2(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta) \quad (5.6.1)$$

do cilindro. É fácil verificar que isto dá um atlas da superfície S_2 (parte do cilindro entre os planos $z = 1$ e $z = -1$) consistindo em duas parametrizações, ambas dadas pela equação (5.6.1) e definidas nos mesmos abertos do atlas de S_1 . Como $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 = id$, é imediato que f é um difeomorfismo.

Por outro lado, calculámos no Exemplo 5.1(3) a primeira forma fundamental de σ_1 : $E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2 \theta$. Para σ_2 obtemos, de forma similar, $E_2 = \cos^2 \theta, F_2 = 0, G_2 = 1$. Em conclusão, $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$ e f é equiareal. ■

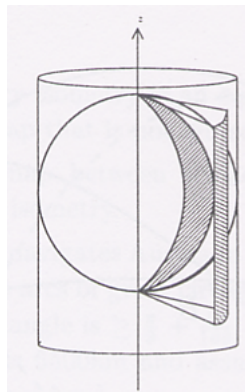
Este resultado foi provado por Arquimedes, que se orgulhava tanto dele que pediu que fosse gravado no seu túmulo. Segundo a lenda, tal foi feito pelo general romano Marcellus, que liderou a conquista de Siracusa na qual Arquimedes foi morto, em 212 A.C. Evidentemente, como Arquimedes não tinha o Cálculo Diferencial à sua disposição, a sua demonstração era muito diferente da que apresentámos aqui. Concretamente o que Arquimedes provou foi que se colocarmos uma esfera dentro dum cilindro com o

mesmo raio R , a área S_1 da superfície esférica da figura é igual à correspondente área S_2 da superfície cilíndrica (definida pelos mesmos planos horizontais) e igual a $2\pi Rh$.



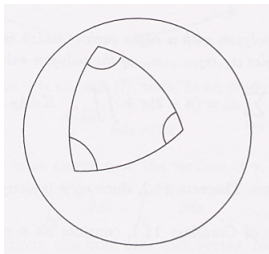
Os cartógrafos chamam ao processo de projectar uma esfera num cilindro seguido do desenrolar do cilindro no plano, *projecção cilíndrica equiareal*. O Teorema de Arquimedes mostra que esta projecção nos dá uma representação precisa das áreas, embora distorça a forma pois não existe nenhuma projecção que represente com precisão a área e a forma simultaneamente, como veremos mais adiante.

(3) O Teorema de Arquimedes pode ser usado para calcular de forma muito rápida a área do fuso determinada no Exemplo 5.4. Se θ é o ângulo de amplitude do fuso, a imagem do fuso pela aplicação f é um rectângulo curvo no cilindro de largura $r\theta$ e altura $2r$:



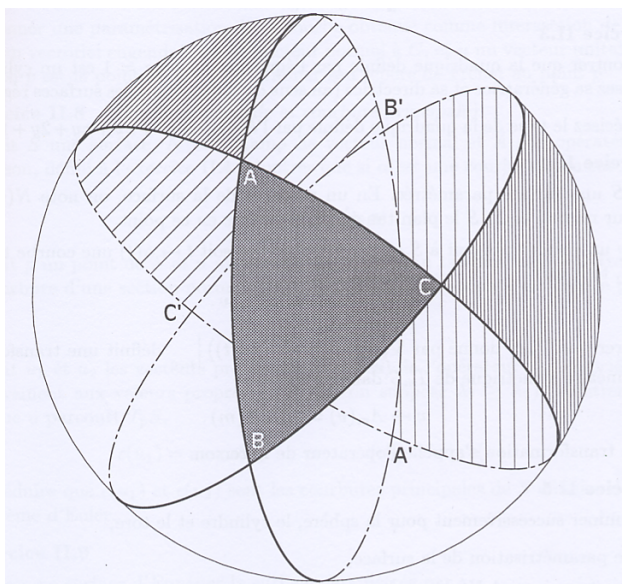
Se aplicarmos em seguida a isometria do cilindro no plano, este rectângulo curvo é transformado num rectângulo no plano, de largura $r\theta$ e altura $2r$. Pelo Teorema de Arquimedes o fuso tem a mesma área do rectângulo curvo e, como qualquer isometria é equiareal, tem a mesma área que o rectângulo plano, ou seja, $2\theta r^2$.

Do conhecimento da área dum fuso qualquer, podemos deduzir imediatamente uma fórmula para a área dum triângulo esférico. Um *triângulo esférico* é um triângulo numa esfera, cujos lados são arcos de círculo máximo:



Teorema 5.7. (Fórmula de Girard). *A área dum triângulo esférico com ângulos α, β e γ , numa esfera de raio r , é igual a $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.*

Demonstração: Sejam A, B e C os vértices do triângulo correspondentes aos ângulos α, β e γ , respectivamente. As três circunferências de círculo máximo dividem a esfera em seis fusos, dois deles de amplitude α com pólos em A e A' (ponto antípoda de A), dois de amplitude β com pólos em B e B' (ponto antípoda de B) e dois de amplitude γ com pólos em C e C' (ponto antípoda de C):



Um dos fusos de amplitude α contém o triângulo ABC e o outro fuso contém o triângulo $A'B'C'$. Denotemos a região reunião destes dois fusos por AA' . O mesmo se passa com os dois fusos de amplitude β (denotemos a sua reunião por BB') e os dois de amplitude γ (denotemos a sua reunião por CC'). Então

$$AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = BB' \cap CC' = ABC \cup A'B'C'$$

e como

$$S^2 = AA' \cup BB' \cup CC'$$

temos

$$\mathcal{A}(S^2) = \mathcal{A}(AA') + \mathcal{A}(BB') + \mathcal{A}(CC') - 2(\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(A'B'C')).$$

Mas $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(A'B'C')$, pois a aplicação que leva cada ponto P da esfera no seu antípoda P' é claramente uma isometria, logo equiareal. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{4} \left(\mathcal{A}(AA') + \mathcal{A}(BB') + \mathcal{A}(CC') - \mathcal{A}(S^2) \right) \\ &= \frac{1}{4} (4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4\pi r^2) \\ &= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).\end{aligned}$$

■

Isto significa que, diferentemente do que se passa na geometria euclidiana plana, na geometria esférica a soma dos ângulos internos dum triângulo é sempre superior a π . Este resultado tem muitas consequências interessantes. Por exemplo:

(1) Não existe nenhuma isometria entre a esfera e o plano (ou mesmo entre uma parte da esfera e uma parte do plano). Em termos cartográficos, isto significa que é impossível termos um mapa (plano) duma porção da superfície terrestre que represente distâncias com total precisão. Porquê? Porque tal isometria teria que preservar distâncias e ângulos, e teria que aplicar circunferências de círculo máximo (que são as geodésicas na esfera) em rectas (que são as geodésicas no plano). Portanto a soma dos ângulos internos dum triângulo esférico teria que coincidir com a soma dos ângulos internos do correspondente triângulo plano, que é π , e isto implicaria que o triângulo esférico tivesse área nula.

(2) Não existe nenhum conceito de *semelhança* na geometria esférica. Dois triângulos semelhantes na geometria euclidiana têm os mesmos ângulos mas são de tamanhos diferentes. Contudo, na geometria esférica os ângulos dum triângulo determinam a sua área e portanto o seu tamanho e forma.

(3) A fórmula de Girard pode ser estendida a qualquer *polígono esférico convexo* (definido pela intersecção de n circunferências de círculo máximo): se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, a sua área é igual a

$$r^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \right). \quad (5.7.1)$$

(Esta fórmula pode ser facilmente provada dividindo o polígono em triângulos e usando a fórmula de Girard.)

Suponhamos agora que dividimos a superfície da esfera em polígonos esféricos convexos. Se denotarmos por V o número de vértices, por A o números de arestas e por F o número de faces (polígonos), qual é a soma dos ângulos de todos os polígonos? Por um lado, é evidente que cada vértice contribui com 2π para o total, pelo que essa soma é $2\pi V$. Por outro lado, se utilizarmos a fórmula (5.7.1) em cada polígono, obtemos

$$r^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = r^2 \pi (n-2) + \mathcal{A}(\text{polígono}).$$

Fazendo a soma sobre todos os polígonos obtemos, no primeiro membro, a soma total dos ângulos multiplicada por r^2 e, no segundo membro, a área total da esfera, $4\pi r^2$, mais

$$r^2\pi(n_1 - 2 + n_2 - 2 + \dots + n_F - 2),$$

onde n_1, n_2, \dots, n_F denotam o número de lados (arestas) dos F polígonos. Observando que cada aresta é uma aresta simultânea de dois polígonos, $n_1 - 2 + n_2 - 2 + \dots + n_F - 2$ é igual a $2A - 2F$. Concluimos então que a soma total dos ângulos é igual a

$$4\pi + 2\pi A - 2\pi F.$$

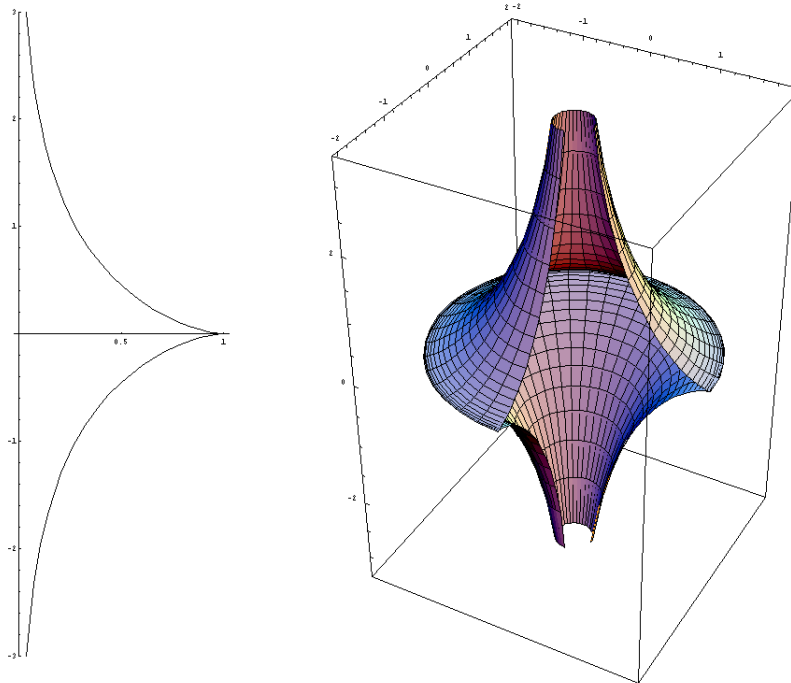
Igualando isto a $2\pi V$ e dividindo por 2π , deduzimos a famosa fórmula de Euler

$$V - A + F = 2.$$

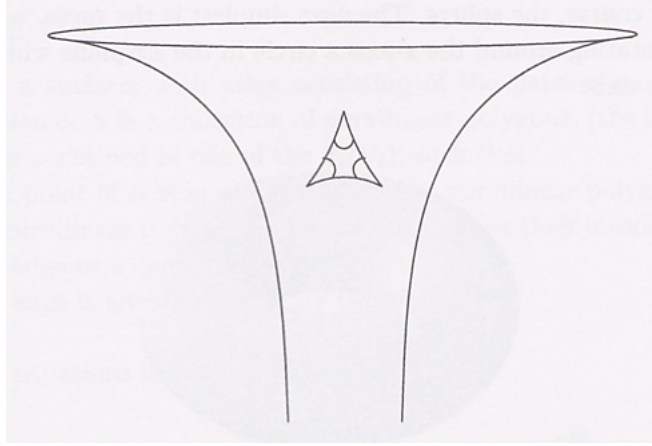
Observação. A fórmula (5.7.1) pode ainda ser generalizada a uma superfície arbitrária (*fórmula de Gauss-Bonnet*), mas não o faremos aqui por falta de tempo. Por exemplo, consideremos a *pseudo-esfera*, isto é, a superfície de revolução definida pela curva geratriz

$$\gamma(u) = \left(e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{e^u}\right) \right) \quad (u \in (-\infty, 0])$$

chamada *tractrix*:



Neste caso, a área de um triângulo de ângulos internos α, β, γ , é igual a $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, o que significa que na geometria da pseudo-esfera a soma dos ângulos internos dum triângulo é sempre inferior a π (é mais um exemplo de *geometria não euclidiana*).



Exercícios

5.1 Calcule a primeira forma fundamental dos seguintes mapas:

(a) $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$;

(b) $\sigma(u, v) = (\cosh u, \sinh u, v)$;

(c) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

5.2 Seja $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow S$ uma reparametrização de um mapa $\sigma : U \rightarrow S$ da superfície S . Prove que

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J$$

onde J é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas Φ , e $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ e E, F, G são, respectivamente, os coeficientes da primeira forma fundamental de $\tilde{\sigma}$ e σ .

5.3 O *cone circular* parametrizado por $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, pode ser “desenrolado”, pelo que é isométrico a parte de um plano (XOY , por exemplo). Verifique que esta isometria é dada por

$$f : \sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(u, v) = \left(u\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

e descreva que parte do plano XOY é isométrica ao cone. Mostre que a aplicação f é de facto uma isometria.

5.4 A aplicação da metade do cone circular $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, no plano OXY , dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, é uma isometria?

5.5 Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$f : \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & \Pi \\ (x, y, z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x, y, z), 0), \end{array}$$

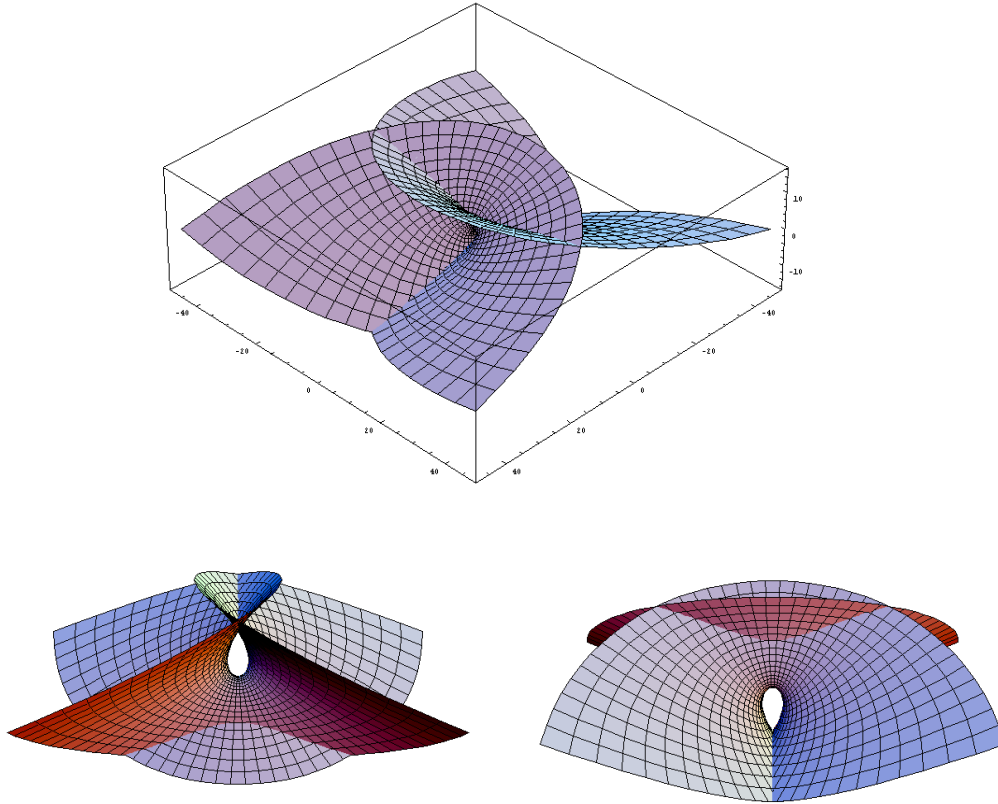
na superfície plana $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$, é conformal. Mostre que:

(a) O mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

(b) O mapa

$$\sigma(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, y - \frac{y^3}{3} + x^2y, x^2 - y^2 \right)$$

da *superfície de Enneper*



é conformal.

5.6 Prove que o mapa de Mercator da esfera (Exercício 3.7) é conformal.

5.7 (a) Prove que qualquer isometria é uma aplicação conformal. Mostre que a projecção estereográfica é um exemplo de uma aplicação conformal que não é uma isometria.

(b) Prove que qualquer isometria é uma aplicação equiareal.

Considere a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto f(P) = Q$, da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P . Mostre que se trata de um exemplo de uma aplicação equiareal que não é uma isometria.

5.8 Prove que qualquer aplicação conformal e equiareal é uma isometria.

5.9 Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e seja $g : S_1 \rightarrow S_2$ definida por

$$g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z).$$

- (a) Prove que g é uma isometria.
- (b) Sabendo que o caminho mais curto em S_2 entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4)$ define uma curva (regular) determine:
- o comprimento desse caminho;
 - esse caminho.
- (c) Determine a área do triângulo em S_2 de vértices $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, 1, 2)$.
- 5.10 Uma *circunferência máxima* numa esfera é uma circunferência obtida intersectando a esfera com um plano passando pelo seu centro.
- Prove que o caminho mais curto entre dois pontos numa esfera é um arco de circunferência máxima.
 - O que diz a fórmula de Girard sobre a área de um triângulo esférico?
 - Um velejador pretende circum-navegar a Austrália, seguindo a rota triangular mais curta possível. Prove que um dos ângulos do triângulo mede, pelo menos, $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{16}$ radianos. (Assuma que a terra é uma esfera de raio $6400Km$ e que a área da Austrália mede $7680000Km^2$.)
- 5.11 Suponha a esfera unitária coberta por F triângulos cujos lados são arcos de circunferência máxima, e tais que a intersecção de quaisquer dois triângulos é vazia ou é um vértice ou uma aresta comum aos dois triângulos. Denote por E o número total de arestas nessa cobertura e por V o número de vértices.
- Mostre que $3F = 2E$.
 - Deduza, usando a Fórmula de Girard, que $2V - F = 4$.
 - Conclua que $V - E + F = 2$ (a chamada *Fórmula de Euler*).

6. A aplicação de Gauss e a segunda forma fundamental

Nesta secção estudaremos a chamada aplicação de Gauss e introduziremos diversas maneiras de medir a “curvatura” de uma superfície. Todas elas se baseiam na chamada segunda forma fundamental de um mapa da superfície.

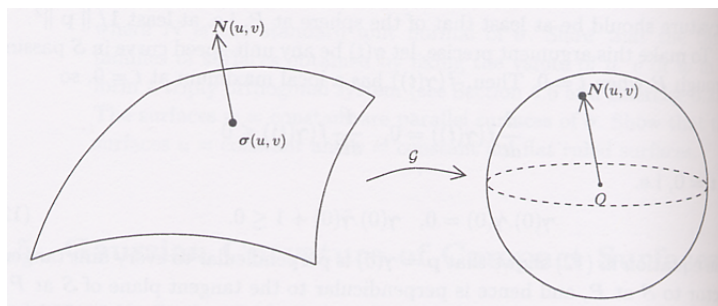
Decorrerá daqui que um mapa de uma superfície fica determinado, a menos de um movimento rígido de \mathbb{R}^3 , pelas suas primeira e segunda formas fundamentais, exactamente do mesmo modo que uma curva parametrizada por comprimento de arco é determinada, a menos de um movimento rígido, pela sua curvatura e torsão.

Da mesma maneira que, como vimos na Proposição I.4.1, a curvatura com sinal duma curva plana parametrizada por comprimento de arco é medida pela mudança de direcção do vector tangente, será de esperar que numa superfície S a mudança de “direcção” do plano tangente (relativamente a um mapa $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$) ou, o que é o mesmo, da normal unitária standard N , meça a curvatura da superfície S na região W .

Para formalizar esta ideia notemos que $N(p)$, em cada ponto p de W , é um ponto da esfera unitária

$$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}.$$

Então podemos considerar a aplicação $W \rightarrow S^2$ que a cada ponto $p = \sigma(u, v)$ faz corresponder o ponto $N(p)$ de S^2 .



Mais geralmente, esta aplicação pode ser definida para qualquer superfície orientável S , pois estas superfícies possuem, como vimos, uma normal unitária $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ bem definida em todo o ponto, dada localmente em cada mapa σ de uma orientação de S por

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

Chamamos *aplicação de Gauss* à aplicação

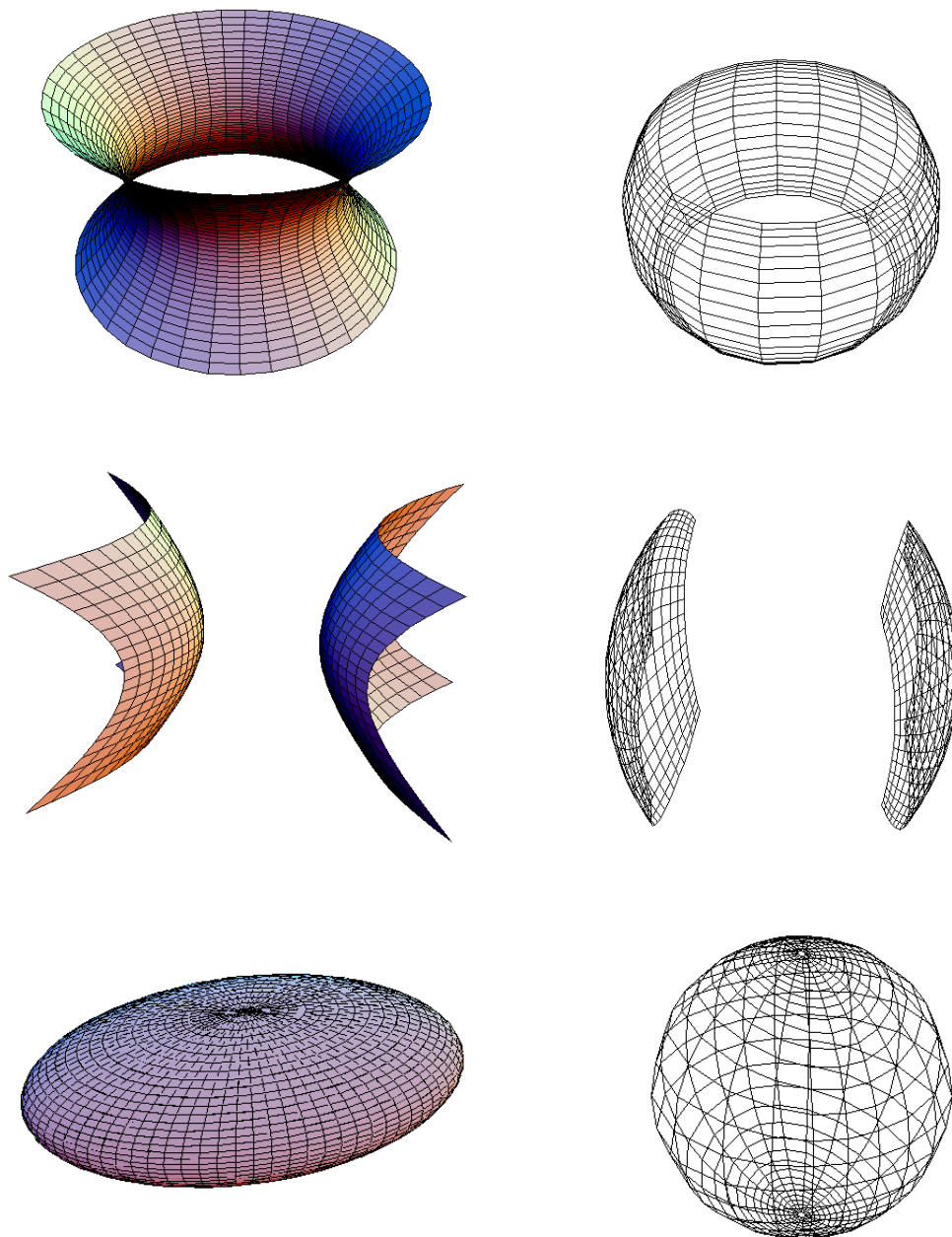
$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S &\rightarrow S^2 \\ p &\mapsto N(p). \end{aligned}$$

Observação. É claro que como N não é única, a aplicação de Gauss está definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida, ou seja, do campo de vectores N escolhido.

Exemplos. Nas figuras seguintes podemos ver, respectivamente, a região equatorial do hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e a sua imagem pela aplicação de Gauss, a região equatorial do hiperbolóide de duas folhas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ e a sua imagem pela aplicação de Gauss, o elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

e a sua imagem pela aplicação de Gauss:



A partir da aplicação de Gauss vamos construir vários invariantes. Para já necessitamos do seguinte resultado geral para funções suaves $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superfícies:

Proposição 6.1. *Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma função suave. Para cada $p \in S_1$, a correspondência $\gamma'(t_0) \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$ define uma aplicação linear*

$$f_{*p} : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2.$$

Vamos chamar à aplicação f_{*p} a *derivada* (ou *diferencial*) de f no ponto p .

Demonstração: Sejam $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1 \subseteq S_1$ um mapa de uma região W_1 de S_1 contendo p , $\sigma_1(q) = p$, $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2 \subseteq S_2$ um mapa de S_2 contendo $f(p)$, $\sigma_2(r) = f(p)$, tais que $f(W_1) \subseteq W_2$. Consideremos ainda uma curva $\gamma : I \rightarrow W_1$ em S_1 tal que $\gamma(t_0) = p$ e a composição

$$I \xrightarrow{\gamma} W_1 \xrightarrow{\sigma_1^{-1}} U_1 \xrightarrow{\sigma_1} W_1 \xrightarrow{f} W_2 \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} U_2.$$

Denotando o vector $\gamma'(t_0)$ por v e o vector $(f \circ \gamma)'(t_0)$ por w , sabemos da demonstração da Proposição 3.1 que

$$v = \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e, analogamente,

$$w = G'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + G'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r)$$

onde $\bar{\gamma}$ denota a composição $\sigma_1^{-1} \circ \gamma$ e G denota a composição $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \gamma = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \bar{\gamma}$. Para abreviar, chamaremos F à composição $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$. Portanto $G = F \circ \bar{\gamma}$.

Se δ for outra curva em S_1 tal que $\delta(t_1) = p$ e $\delta'(t_1) = v$ e definirmos, analogamente, $\tilde{w} = (f \circ \delta)'(t_1)$ e $\tilde{G} = F \circ \bar{\delta}$, teremos

$$v = \bar{\delta}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\delta}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e

$$\tilde{w} = \tilde{G}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + \tilde{G}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r).$$

Em particular, $\bar{\gamma}'_1(t_0) = \bar{\delta}'_1(t_1)$ e $\bar{\gamma}'_2(t_0) = \bar{\delta}'_2(t_1)$. Daqui decorre que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G'_1(t_0) \\ G'_2(t_0) \end{bmatrix} &= J_G(t_0) = J_F(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) = J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\delta}'_1(t_1) \\ \bar{\delta}'_2(t_1) \end{bmatrix} = J_F(q) \cdot J_{\bar{\delta}}(t_1) = J_{\tilde{G}}(t_1) = \begin{bmatrix} \tilde{G}'_1(t_1) \\ \tilde{G}'_2(t_1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{w} = w$, o que assegura que o vector w não depende da escolha da curva γ e que f_{*p} está bem definida.

Isto também mostra que, para qualquer vector $v \in T_p S_1$ de coordenadas v_1 e v_2 na base $(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q))$, a sua imagem por f_{*p} é dada por

$$f_{*p}(v) = J_F(q) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto f_{*p} não é mais que a aplicação linear de $T_p S_1$ em $T_{f(p)} S_2$ cuja matriz, relativamente às bases $(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q))$ e $(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r))$, é $J_F(q)$. ■

Agora, sendo \mathcal{G} uma aplicação suave de S em S^2 , podemos aplicar 6.1 e concluir que a derivada de \mathcal{G} no ponto p é uma aplicação linear definida em $T_p S$ com valores em $T_{N(p)} S^2$. Mas $T_{N(p)} S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (v \mid N(p)) = 0\} = T_p S$, portanto

$$\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Observação. Uma vez que \mathcal{G} está definida a menos de sinal, a sua derivada \mathcal{G}_{*p} também fica definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida.

Seja E um espaço euclidiano. Uma aplicação linear $f : E \rightarrow E$ diz-se *simétrica* se $(f(v_1) \mid v_2) = (v_1 \mid f(v_2))$ para quaisquer $v_1, v_2 \in E$.

Proposição 6.2. *Para cada $p \in S$, \mathcal{G}_{*p} é uma aplicação simétrica.*

Demonstração: Como \mathcal{G}_{*p} é linear, bastará verificarmos a igualdade

$$\left(\mathcal{G}_{*p}(v_1) \mid v_2 \right) = \left(v_1 \mid \mathcal{G}_{*p}(v_2) \right)$$

para os vectores da base $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$ de $T_p S$, sendo $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ um mapa de S contendo $p = \sigma(q)$.

Em primeiro lugar observemos que, para $v = \gamma'(t_0) \in T_p S$, $\mathcal{G}_{*p}(v) = (\mathcal{G} \circ \gamma)'(t_0)$ e $J_{\mathcal{G} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot J_{\gamma}(t_0)$. Em particular, para $v = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$,

$$J_{\gamma}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $J_{\mathcal{G} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e conseqüentemente

$$\mathcal{G}_{*p}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)\right) = \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q).$$

Analogamente

$$\mathcal{G}_{*p}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\right) = \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q).$$

Provemos então que

$$\left(\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right).$$

Para qualquer $(x, y) \in U$ temos

$$\left((\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right) = 0 \tag{6.2.1}$$

e

$$\left((\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right) = 0. \tag{6.2.2}$$

Derivando (6.2.1) obtemos

$$\left(\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right) + \left((\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(x, y) \right) = 0 \quad (6.2.3)$$

e derivando (6.2.2) obtemos

$$\left(\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right) + \left((\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) \right) = 0.$$

Em particular, para $(x, y) = q$ obtemos a igualdade pretendida:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) &= - \left((\mathcal{G} \circ \sigma)(q) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(q) \right) \\ &= - \left((\mathcal{G} \circ \sigma)(q) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(q) \right) \\ &= \left(\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right). \end{aligned}$$

■

Recordemos agora os seguintes resultados da Álgebra Linear:

- *Existindo uma aplicação linear simétrica $f : E \rightarrow E$, então E possui uma base ortonormada formada por vectores próprios de f .*
- *Todos os valores próprios de uma matriz simétrica são reais e o seu determinante é igual ao produto desses valores próprios.*

Podemos assim concluir que existe uma base ortonormada (e_1, e_2) de $T_p S$ tal que $\mathcal{G}_{*p}(e_1) = \kappa_1 e_1$ e $\mathcal{G}_{*p}(e_2) = \kappa_2 e_2$ sendo $\kappa_2 \leq \kappa_1$. Aos números κ_1 e κ_2 , que são os valores próprios de \mathcal{G}_{*p} , chama-se *curvaturas principais* de S em p . Portanto a matriz de \mathcal{G}_{*p} na base (e_1, e_2) é igual a

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios e_1 e e_2 dizem-se os *vectores principais* de S em p .

Observação. As curvaturas principais também estão definidas apenas a menos de sinal.

Definiremos ainda mais duas medidas da curvatura de uma superfície. Chama-se *curvatura gaussiana* de S no ponto p ao determinante de \mathcal{G}_{*p} :

$$K(p) = \kappa_1 \kappa_2.$$

Chama-se *curvatura média* de S no ponto p a metade do traço de \mathcal{G}_{*p} :

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

O ponto p diz-se

- *elíptico*, se $K(p) > 0$.
- *hiperbólico*, se $K(p) < 0$.
- *parabólico*, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$.
- *planar*, se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$.

Estas designações serão justificadas no final desta secção. Antes disso, vejamos como podemos calcular $K(p)$ e $H(p)$ a partir do conhecimento de um mapa $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ contendo $p = \sigma(q)$.

Observação. Note que a única definição que depende da escolha de N é a de curvatura média (mantendo-se igual ou mudando de sinal quando consideramos outra orientação), conforme se poderá facilmente verificar. Assim, a natureza dos pontos de S não depende da escolha de N .

Chamamos à forma bilinear

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto (\mathcal{G}_{*p}(v_1) \mid v_2) \end{aligned}$$

a *segunda forma fundamental* de S no ponto p . Esta aplicação, dependendo da escolha de N , só está definida a menos de sinal.

Vejamos que o conhecimento das primeira e segunda formas fundamentais de S em p é suficiente para determinarmos a natureza desse ponto.

Método para determinar $K(p)$ e $H(p)$ a partir de $\sigma : U \rightarrow S$

1. Determinar a matriz da primeira forma fundamental:

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

onde

$$E(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right), \quad F(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \quad \text{e} \quad G(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right).$$

2. Determinar o campo de vectores normais unitários induzido por σ :

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

3. Determinar a matriz da segunda forma fundamental:

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix}$$

onde

$$e(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \right),$$

$$f(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right)$$

e

$$g(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right).$$

As seguintes fórmulas alternativas de cálculo são mais úteis na prática (pois não envolvem as derivadas de $\mathcal{G} \circ \sigma$) e obtêm-se de (6.2.1) e (6.2.2) por derivação, analogamente ao modo como obtivemos (6.2.3):

$$e(q) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(q) \mid N(p) \right), \quad f(q) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(q) \mid N(p) \right) \quad \text{e} \quad g(q) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(q) \mid N(p) \right).$$

4. Utilizar o seguinte resultado:

Teorema 6.3. *Para cada $p \in S$, temos*

$$K(p) = \frac{e(q)g(q) - f(q)^2}{E(q)G(q) - F(q)^2}, \quad H(p) = \frac{e(q)G(q) - 2f(q)F(q) + g(q)E(q)}{2(E(q)G(q) - F(q)^2)},$$

$$k_1(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}, \quad k_2(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

(Note que $EG - F^2 > 0$ por (5.4.1).)

Demonstração: Com vista a simplificar as notações, omitimos por vezes p e q nas fórmulas que se seguem.

Designemos por

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a matriz de \mathcal{G}_{*p} relativamente à base $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$. Então

$$e(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = a_{11}E(q) + a_{21}F(q),$$

$$f(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = a_{12}E(q) + a_{22}F(q),$$

$$f(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = a_{11}F(q) + a_{21}G(q)$$

e

$$g(q) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = a_{12}F(q) + a_{22}G(q).$$

Em termos matriciais isto significa que $\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_I \mathcal{W}$, donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{W}) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

e

$$K = \det(\mathcal{W}) = \left(\frac{1}{EG - F^2} \right)^2 \begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Por outro lado,

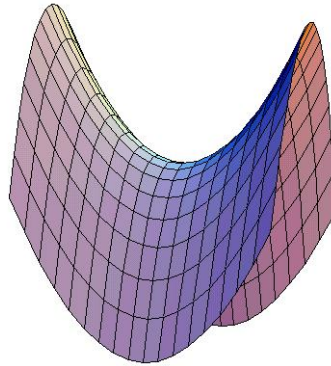
$$\begin{cases} \kappa_1 \kappa_2 = K \\ \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = H. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e sabendo que $\kappa_1 \geq \kappa_2$ obtemos $\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ e $\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$. ■

Desta demonstração decorre também que a matriz da aplicação $\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S$ relativamente à base $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$, chamada *matriz de Weingarten* do mapa σ de S , é a matriz

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}.$$

Exemplos 6.4. (1) Consideremos o parabolóide hiperbólico dado por $z = x^2 - y^2$,



parametrizado globalmente por $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = (1, 0, 2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (0, 1, -2y),$$

temos

$$E(x, y, z) = 1 + 4x^2, \quad F(x, y, z) = -4xy \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 1 + 4y^2.$$

Por outro lado,

$$N(x, y, z) = \frac{(-2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Então, como

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, y) = (0, 0, 2), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x, y) = (0, 0, -2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) = (0, 0, 0),$$

temos

$$e(x, y, z) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \quad f(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Isto implica que

$$K(x, y, z) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} < 0,$$

o que significa que todo o ponto do parabolóide hiperbólico é hiperbólico.

Em particular, no ponto $p = (0, 0, 0)$ a matriz de \mathcal{G}_{*p} na base $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0))$ é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz de \mathcal{G}_{*p} nesta base já é diagonal, pelo que $\kappa_1(p) = 2$, $\kappa_2(p) = -2$ e os vectores principais são $e_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $e_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) = (0, 1, 0)$.

(2) No caso do plano, vimos no Exemplo 5.1(1) que para a parametrização $\sigma(u, v) = p + ux + vy$, $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$. Como $\partial^2 \sigma / \partial u^2 = \partial^2 \sigma / \partial v^2 = 0$, temos $e = f = g = 0$. Portanto $K = H = 0$ e todo o ponto é planar, como seria de esperar.

(3) É intuitivamente claro que uma esfera curva sempre em qualquer direcção e em qualquer ponto da mesma maneira. Esperamos pois que as curvaturas principais da esfera sejam iguais em todo o ponto, e constantes ao longo da esfera. Para confirmarmos isto, utilizemos a parametrização em termos da latitude θ e longitude φ , usada no Exemplo 5.1(3). Vimos aí que $E = 1$, $F = 0$ e $G = \cos^2 \theta$. Como $e = 1$, $f = 0$ e $g = \cos^2 \theta$ (verifique) temos neste caso $K = H = 1$ e $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Logo todo o ponto da esfera é elíptico e qualquer vector tangente é um vector principal.

Mais geralmente, quando a esfera tem raio $r > 0$, $K = 1/r^2$ e $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$.

(4) Exemplos de pontos parabólicos são os pontos do cilindro definido por $x^2 + y^2 = r^2$.

(5) Já vimos exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante, nula — caso do plano — e positiva — caso da esfera. Um exemplo de superfície com curvatura gaussiana constante negativa é a pseudo-esfera (recorde a última observação da secção 5). De facto, pelo Exercício 6.1, a curvatura gaussiana de uma superfície de revolução $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ é dada por

$$K(\sigma(u, v)) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

No caso da pseudo-esfera

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u)) = \left(e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{e^u}\right) \right)$$

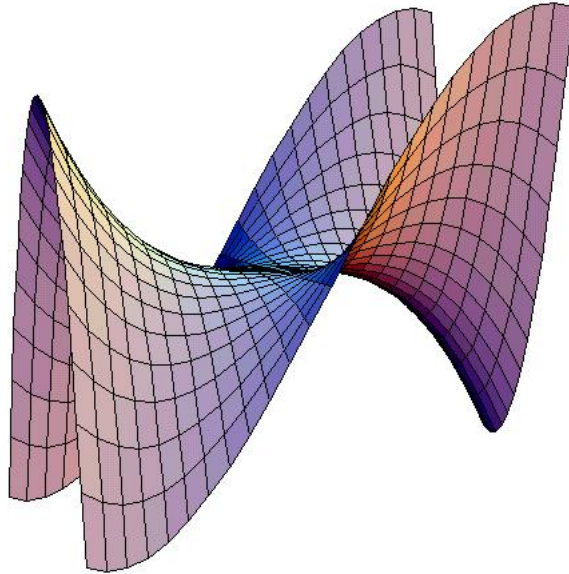
é uma parametrização da geratriz logo

$$K = -\frac{e^u}{e^u} = -1$$

e todo o ponto é hiperbólico.

A geometria numa pseudo-esfera é um exemplo de geometria não euclidiana. Muitos dos resultados da geometria euclidiana plana têm análogos para a pseudo-esfera mas existem diferenças significativas, como observámos no final da secção anterior. É o facto da curvatura gaussiana na pseudo-esfera ser constante igual a -1 que está na base do resultado que estabelece que a soma dos ângulos internos dum triângulo pseudo-esférico é sempre inferior a π (do mesmo modo que é o facto da curvatura gaussiana na esfera ser constante igual a 1 que está na base da fórmula de Girard).

(6) Por causa da sua forma, um parabolóide hiperbólico é muitas vezes chamado de *sela*. Uma pessoa pode sentar-se confortavelmente num parabolóide hiperbólico. No entanto, um macaco teria dificuldades pois não existe espaço para a cauda. A *sela de macaco*, por outro lado, já é adequada para um macaco; é a superfície parametrizada globalmente por $\sigma(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$:



Podemos determinar facilmente os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais:

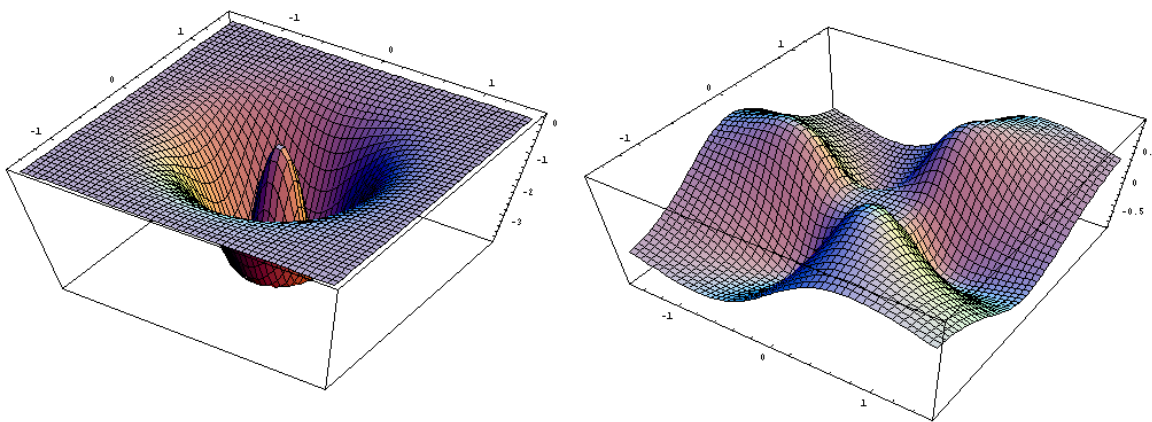
$$E = 1 + (3u^2 - 3v^2)^2, \quad F = -6uv(3u^2 - 3v^2), \quad G = 1 + 36u^2v^2,$$

$$e = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \quad f = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \quad g = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}.$$

Então,

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{-27u^5 + 54u^3v^2 + 81uv^4}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Na figura seguinte podemos ver os gráficos destas funções para $u, v \in [-1.5, 1.5]$ (à esquerda, o da curvatura gaussiana, e à direita, o da curvatura média).



Isto mostra que $(0, 0, 0)$ é planar e todos os outros pontos são hiperbólicos. Além disso, a curvatura de Gauss é invariante por rotações em torno do eixo OZ , embora a superfície em si não tenha esta propriedade.

(7) Consideremos agora o toro (pág. 70 e Exercício 2.10) parametrizado por

$$\sigma(u, v) = \left((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, b \sin v \right).$$

Neste caso temos

$$E = (a + r \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \\ e = -\cos v(a + r \cos v), \quad f = 0, \quad g = -r.$$

Portanto

$$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad H = \frac{(a + 2r \cos v)}{2r(a + r \cos v)}, \\ \kappa_1 = -\frac{\cos v}{a + r \cos v}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r}.$$

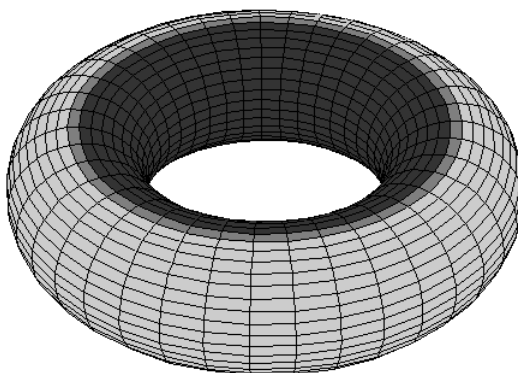
Então a curvatura gaussiana anula-se ao longo das curvas dadas por $v = \pm\pi/2$. Estes são os pontos parabólicos do toro. O conjunto dos pontos hiperbólicos é

$$\{\sigma(u, v) \mid \pi/2 < v < 3\pi/2\},$$

e o conjunto dos pontos elípticos é

$$\{\sigma(u, v) \mid -\pi/2 < v < \pi/2\}.$$

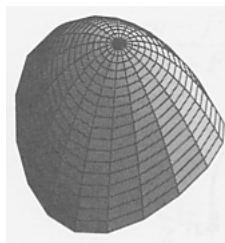
Estes pontos estão marcados na figura seguinte (os pontos elípticos, marcados a cinzento claro, os pontos hiperbólicos, a negro, e os pontos parabólicos, a cinzento escuro).



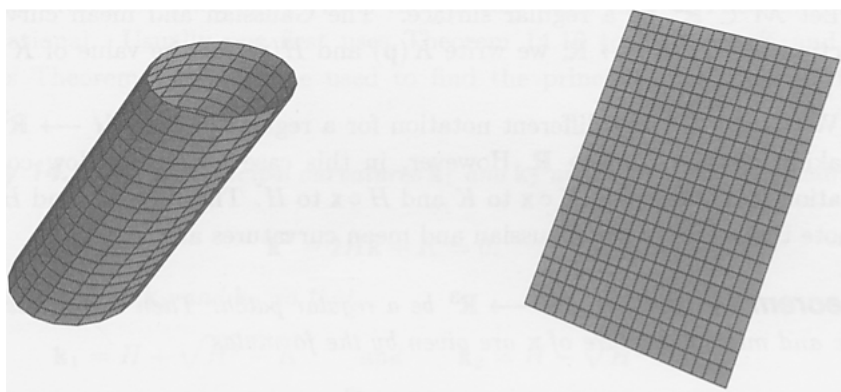
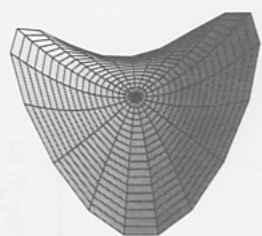
Existem duas circunferências ao longo dos quais os pontos são elípticos. Na figura só se vê uma dessas circunferências ($v = \pi/2$).

Na maior parte dos casos é possível, olhando para a superfície, reconhecer quais pontos são elípticos, hiperbólicos, parabólicos ou planares (isso será claro mais adiante). A figura seguinte mostra exemplos de superfícies constituídas na sua totalidade por cada um dos quatro tipos de pontos.

Elípticos



Hiperbólicos



Parabólicos

Planares

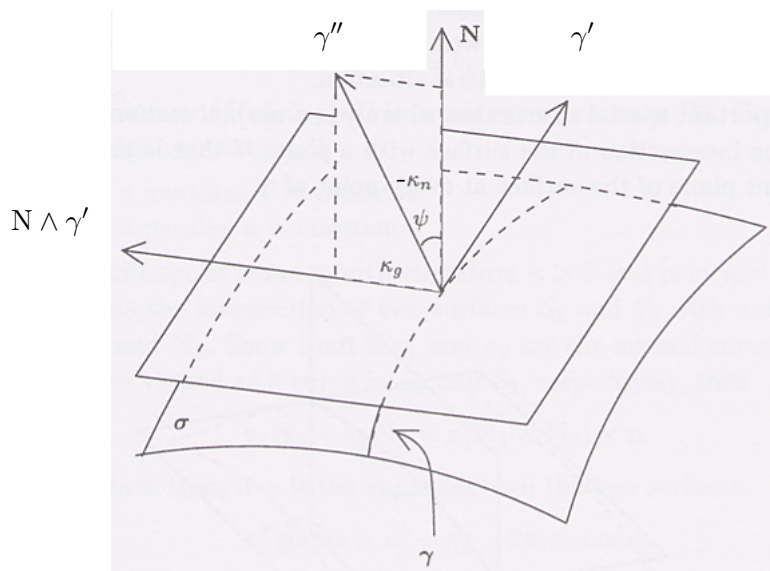
Já sabemos como calcular $K(p)$ e $H(p)$ e concluir da natureza do ponto $p \in S$. Vamos agora ver que o valor relativo das curvaturas principais nos diz muito sobre a forma de uma superfície na vizinhança de p .

Se $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ define uma curva parametrizada por comprimento de arco num mapa de uma superfície S então $\gamma'(t)$ é um vector unitário em $T_{\gamma(t)}S$. Assim $\gamma'(t)$

é perpendicular a $N(\gamma(t))$ e então $\gamma'(t), N(\gamma(t))$ e $N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)$ formam uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 . Mais uma vez porque γ está parametrizada por comprimento de arco, $\gamma''(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$ e é portanto uma combinação linear de $N(\gamma(t))$ e $N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)$:

$$\gamma''(t) = \alpha(t)N(\gamma(t)) + \beta(t)(N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)).$$

Os escalares $\kappa_n(\gamma, t) = -\alpha(t)$ e $\kappa_g(\gamma, t) = \beta(t)$ são chamados respectivamente *curvatura normal* e *curvatura geodésica* de γ em t .



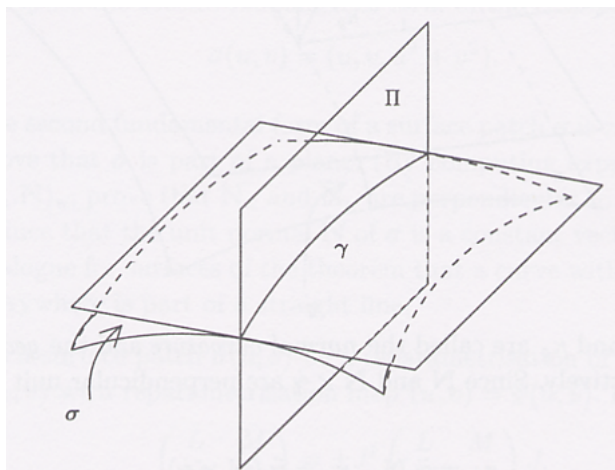
Portanto

$$\kappa_n(\gamma, t) = -\left(\gamma''(t) \mid N(\gamma(t))\right), \quad \kappa_g(\gamma, t) = \left(\gamma''(t) \mid N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)\right)$$

e $\|\gamma''(t)\|^2 = (\kappa_n(\gamma, t))^2 + \kappa_g(\gamma, t)^2$. Logo, a curvatura $\kappa_\gamma(t) = \|\gamma''(t)\|$ de γ é dada por

$$(\kappa_\gamma(t))^2 = (\kappa_n(\gamma, t))^2 + (\kappa_g(\gamma, t))^2.$$

Um caso particular importante ocorre quando γ é uma *secção normal* da superfície, isto é, γ é a intersecção de S com um plano Π que é perpendicular ao plano tangente da superfície em todo o ponto de γ .



Exemplos. (1) Dado um vector unitário v , tangente a S em p , a intersecção de S com o plano Π determinado por v e pela normal $N(p)$, é uma secção normal de S , chamada *secção normal de S na direcção de v* .

(2) As secções normais de um plano são rectas tendo pois curvatura nula.

(3) As secções normais de uma esfera de raio r são circunferências de círculo máximo, cuja curvatura é igual a $1/r$.

Como os pontos de γ pertencem a Π , γ é plana, Π é o plano osculador de γ e $N_\gamma(t)$ é paralelo a Π . Como Π é perpendicular ao plano tangente, $N(\gamma(t))$ também é paralelo a Π . Mas $N_\gamma(t)$ e $N(\gamma(t))$ são ambos perpendiculares a $\gamma'(t)$ e $\gamma'(t)$ é paralelo a Π , logo $N_\gamma(t)$ e $N(\gamma(t))$ têm que ser paralelos, isto é, $N_\gamma(t) = \pm N(\gamma(t))$. Então $\kappa_n(\gamma, t) = \pm \kappa_\gamma(t)$ e $\kappa_g(\gamma, t) = 0$ para uma secção normal.

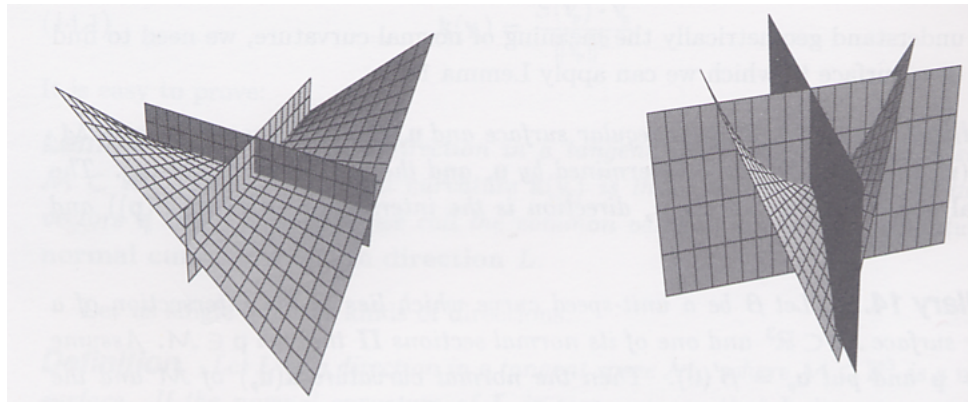
Em conclusão,

as curvaturas normais das secções normais de S são, a menos de sinal, iguais às suas curvaturas.

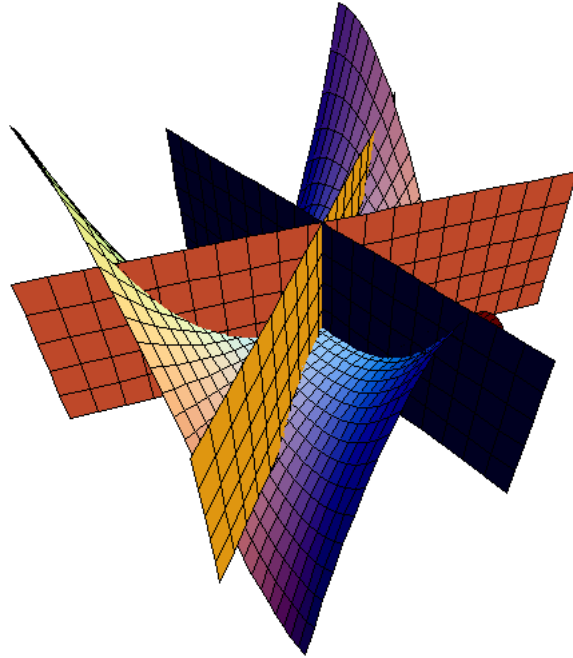
(Terão o mesmo sinal quando $N(\gamma(t))$ e $N_\gamma(t)$ têm o mesmo sentido e terão sinal oposto caso contrário.)

Observação. Pode provar-se que uma curva γ em S é uma geodésica (pág. 86) se e só se a sua curvatura geodésica é nula em qualquer ponto. Portanto qualquer secção normal é uma geodésica.

À medida que o vector tangente muda de direcção, a superfície pode “curvar” de maneira muito diferente. Um bom exemplo disto acontece no ponto central dum parabolóide hiperbólico. Na seguinte figura, à esquerda, ambas as secções normais intersectam a superfície em rectas; portanto a curvatura normal determinada por cada uma destas secções é nula. Contrastando com isto, na figura da direita, que mostra as secções normais definidas pelos vectores principais, a curvatura normal determinada por uma das secções é positiva enquanto que a outra é negativa.



As secções normais no centro de uma sela de macaco são similares a estas do parabolóide hiperbólico, mas mais complicadas:



Vejam os como a curvatura normal está relacionada com a segunda forma fundamental.

Lema 6.5. (Lema de Meusnier)

- (a) *Seja $\gamma : I \rightarrow W \subseteq S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(t_0) = p$. Então $\kappa_n(\gamma, t_0) = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$.*
- (b) *Se γ_1 e γ_2 são curvas em S parametrizadas por comprimento de arco tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$ e $\gamma_1'(t_1) = \gamma_2'(t_2)$ então $\kappa_n(\gamma_1, t_1) = \kappa_n(\gamma_2, t_2)$.*

Demonstração: (a) Para cada $t \in I$, $(\gamma'(t) \mid N(\gamma(t))) = 0$ pois $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ e $N(\gamma(t))$ é ortogonal a $T_{\gamma(t)}S$. Derivando obtemos

$$(\gamma''(t) \mid N(\gamma(t))) + (\gamma'(t) \mid (N \circ \gamma)'(t)) = 0.$$

Em particular, $(\gamma'(t_0) \mid (N \circ \gamma)'(t_0)) = -(\gamma''(t_0) \mid N(\gamma(t_0)))$, donde

$$\kappa_n(\gamma, t_0) = (\gamma'(t_0) \mid (N \circ \gamma)'(t_0)) = (\gamma'(t_0) \mid \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0))) = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)).$$

(b) Consequência imediata de (a). ■

Proposição 6.6. *Seja p um ponto de S . Então*

$$\left\{ \kappa_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p \right\} = [\kappa_2(p), \kappa_1(p)].$$

Demonstração: Seja (e_1, e_2) a tal base ortonormada de $T_p S$ formada por vectores próprios de \mathcal{G}_{*p} . Denotando por α_1 e α_2 as coordenadas de $\gamma'(t_0)$ nesta base, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \|\gamma'(t_0)\|^2 = 1$. Então

$$\begin{aligned}\kappa_n(\gamma, t_0) &= \left(\gamma'(t_0) \mid \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0)) \right) \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \mathcal{G}_{*p}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)) \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \alpha_1 \kappa_1 e_1 + \alpha_2 \kappa_2 e_2) \\ &= \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2,\end{aligned}$$

donde

$$\kappa_2 = \kappa_2 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2 \leq \kappa_n(\gamma, t_0) \leq \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_1 \alpha_2^2 = \kappa_1.$$

Isto mostra que $\{\kappa_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p\} \subseteq [\kappa_2(p), \kappa_1(p)]$.

Reciprocamente, dado $a \in [\kappa_2(p), \kappa_1(p)]$, consideremos o vector $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ de coordenadas

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a - \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{a - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}}.$$

Como $v \in T_p S$, existe uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Evidentemente

$$\kappa_n(\gamma, t_0) = \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2 = \kappa_1 \frac{a - \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} + \kappa_2 \frac{a - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = a.$$

■

E mais: quando $\kappa_2 < \kappa_1$, $\kappa_n(\gamma, t_0) = \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2$ atinge o valor máximo κ_1 se e só se

$$\kappa_1 + \alpha_2^2(\kappa_2 - \kappa_1) = \kappa_1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \pm 1,$$

ou seja, quando $\gamma'(t_0) = \pm e_1$. Analogamente, $\kappa_n(\gamma, t_0)$ atinge o valor mínimo κ_2 para $\gamma'(t_0) = \pm e_2$.

Em conclusão:

As curvaturas principais num ponto $p \in S$ são o máximo e o mínimo valores das curvaturas normais de todas as curvas em S que passam por p . As direcções principais são os vectores tangentes das curvas dando esses valores máximo e mínimo.

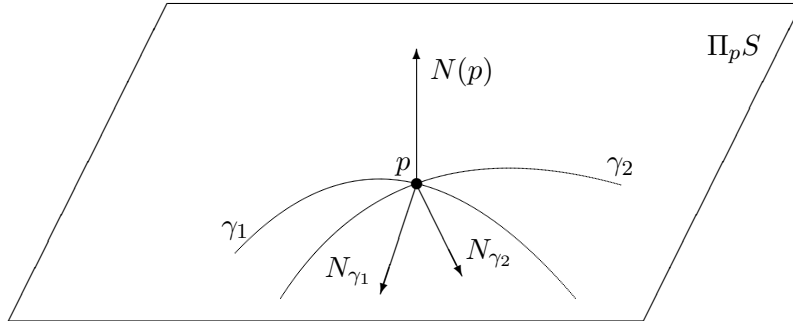
A Proposição 6.6 permite-nos tirar alguma informação geométrica do conhecimento da natureza de um ponto $p \in S$:

Caso 1: *p é elíptico.*

Isto significa que $\kappa_1 \neq 0$ e $\kappa_2 \neq 0$ têm o mesmo sinal. Então, para qualquer par de curvas γ_1 e γ_2 em S tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$, temos

$$\kappa_2 \leq \kappa_n(\gamma_i, t_i) = -\|\gamma_i''(t_i)\|(N_{\gamma_i}(t_i) \mid N(p)) \leq \kappa_1 \quad (i = 1, 2).$$

Consequentemente $(N_{\gamma_1}(t_1) \mid N(p))$ e $(N_{\gamma_2}(t_2) \mid N(p))$ têm o mesmo sinal pelo que $N_{\gamma_1}(t_1)$ e $N_{\gamma_2}(t_2)$ “apontam” para o mesmo lado de $\Pi_p S$:

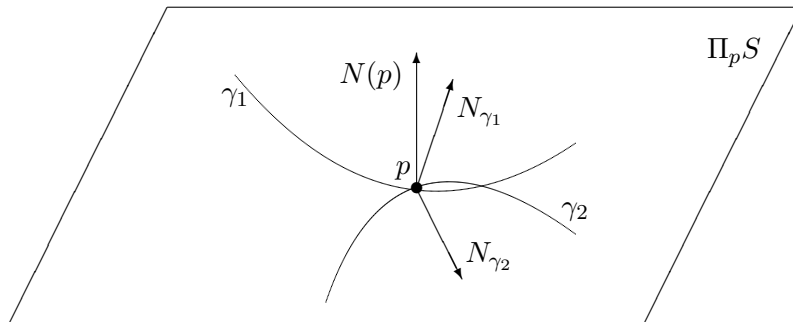


Em conclusão:

Numa vizinhança de p , as curvas em S que passam por p “apontam” todas para o mesmo lado de $\Pi_p S$.

Caso 2: *p é hiperbólico.*

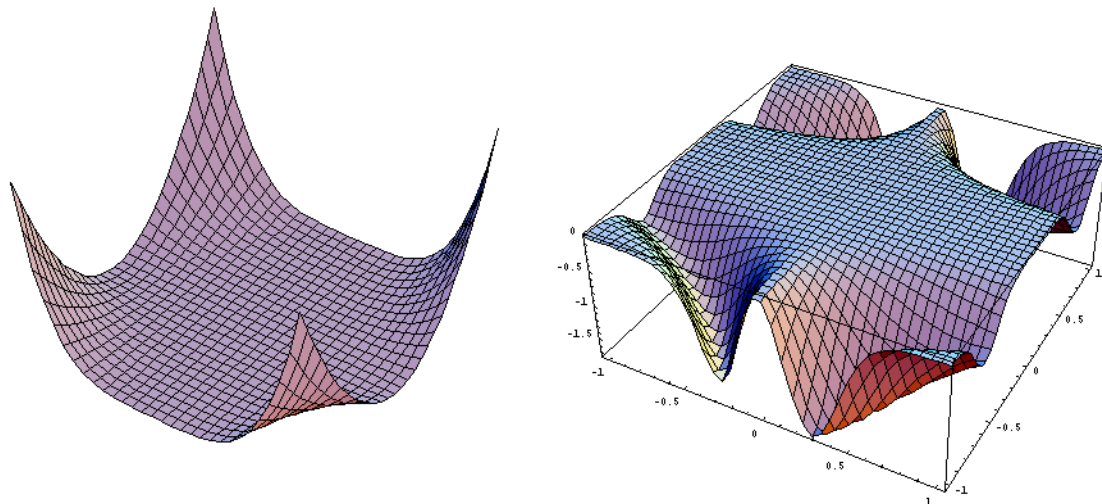
Neste caso, como κ_1 e κ_2 têm sinais contrários, existem curvas γ_1 e γ_2 em S com $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$ tais que $N_{\gamma_1}(t_1)$ e $N_{\gamma_2}(t_2)$ “apontam” para lados opostos de $\Pi_p S$:



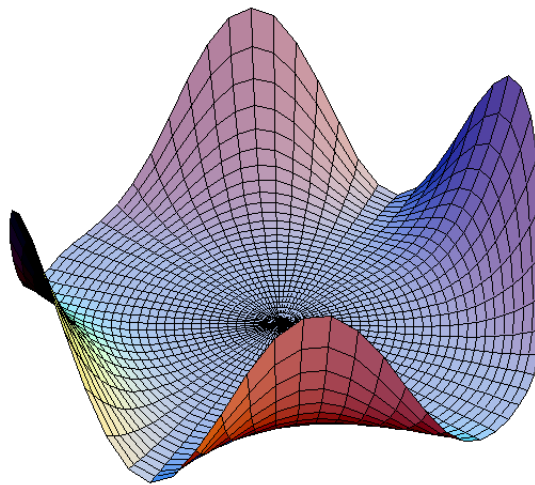
Em conclusão:

Numa vizinhança de p , existem curvas em S que passam por p que “apontam” para lados opostos de $\Pi_p S$.

Exemplo. Consideremos a superfície definida pela equação $z = x^2 y^4$, cujo gráfico (para $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$) pode ver-se na figura seguinte, à esquerda.



O gráfico da direita representa a respectiva curvatura gaussiana e mostra que esta nunca é positiva. Portanto não há pontos elípticos. Todavia, o gráfico da superfície não mostra claramente isso. Redesenhando o gráfico de outro modo, é possível observar-se a olho nu que todos os pontos são hiperbólicos ou planares:



Podemos obter ainda mais informação geométrica das curvaturas principais. Em primeiro lugar, comecemos por observar que, aplicando um movimento rígido de \mathbb{R}^3 e uma mudança de coordenadas a σ (o que não altera evidentemente a forma da superfície), podemos sempre supor que

- $p = (0, 0, 0)$ e $\sigma(0, 0) = p$;
- o plano tangente a S em p definido por σ é o plano XOY ;
- os vectores paralelos aos eixos OX e OY são vectores principais em p , correspondendo às curvaturas principais κ_1 e κ_2 .

Então os vectores principais unitários podem ser expressos em termos de $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0)$:

$$(1, 0, 0) = \alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0), \quad (0, 1, 0) = \alpha_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0).$$

Assim qualquer ponto $(x, y, 0)$ no plano tangente $\Pi_p S$ é igual a

$$x \left(\alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) \right) + y \left(\alpha_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) \right) = s \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + t \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0),$$

denotando $x\alpha_1 + y\alpha_2$ por s e $x\beta_1 + y\beta_2$ por t . Usando a fórmula de Taylor podemos escrever

$$\begin{aligned} \sigma(s, t) &= \sigma(0, 0) + s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + t \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) + R(s, t) \\ &= (0, 0, 0) + (x, y, 0) + \frac{1}{2} \left(s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) + R(s, t) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{R(s, t)}{s^2 + t^2} = 0$$

e todas as derivadas são calculadas na origem $(0, 0)$. Como $\Pi_p S = XOY$, então $N(p) = (0, 0, 1)$ e para qualquer $(x, y, z) = \sigma(s, t) \in S$,

$$\begin{aligned} z &= \left(\sigma(s, t) \mid N(p) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(0, 0) + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(0, 0) + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(0, 0) \right) + R(s, t) \mid N(p) \right). \end{aligned}$$

Logo, para qualquer ponto $(x, y, z) = \sigma(s, t) \in S$ suficientemente próximo de p podemos desprezar os termos de ordem superior a dois e concluir que

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}(s^2 e + 2stf + t^2 g) \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Denotando a matriz da segunda forma fundamental por \mathcal{F}_{II} e como

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2} \left(x^2 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + xy \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \right) + \right. \\ &\quad \left. + y^2 \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(x^2 II_p(e_1, e_1) + 2xy II_p(e_1, e_2) + y^2 II_p(e_2, e_2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2). \end{aligned}$$

Em conclusão:

Numa vizinhança de p , se desprezarmos os termos de ordem superior a dois, a superfície coincide com a superfície quádrlica

$$z = -\frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2). \quad (6.6.1)$$

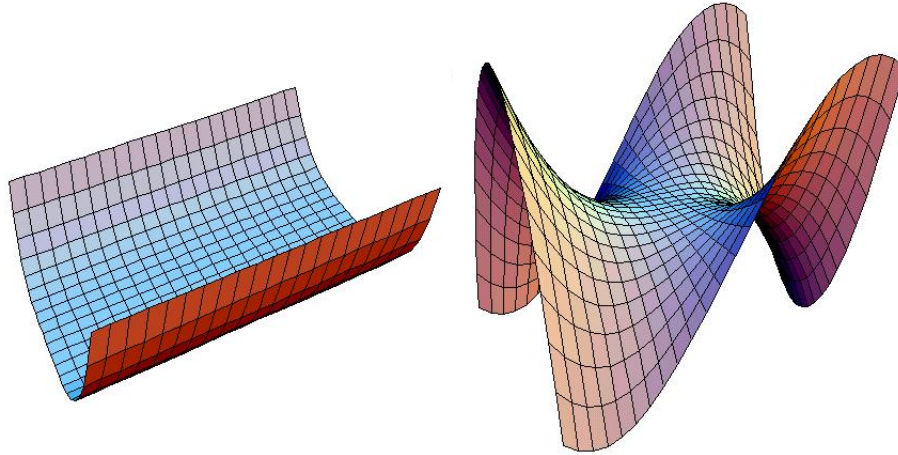
Temos quatro casos a distinguir:

Caso 1: $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 > 0$ ou $\kappa_1 < 0$ e $\kappa_2 < 0$. Então (6.6.1) é a equação de um parabolóide elíptico (recorde o Teorema 4.1) e p é um ponto elíptico.

Caso 2: $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 < 0$. Então (6.6.1) é a equação de um parabolóide hiperbólico e p é um ponto hiperbólico.

Caso 3: $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 < 0$ ou $\kappa_1 > 0$ e $\kappa_2 = 0$. Então (6.6.1) é a equação de um cilindro parabólico e p é um ponto parabólico.

Caso 4: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Então (6.6.1) é a equação de um plano e p é um ponto planar. Neste caso, não podemos determinar a forma da superfície na vizinhança de p sem examinar as derivadas de ordem superior a dois (no caso não planar, estes termos são pequenos comparados com $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2$ quando x e y são pequenos). Por exemplo, nas superfícies seguintes ($z = y^4$, à esquerda, e a sela do macaco, à direita) a origem é um ponto planar, mas têm formas muito diferentes.



(Note que esta classificação é independente do mapa σ , uma vez que mudar de orientação deixa as curvaturas principais inalteradas ou muda-as, a ambas, de sinal.)

Exercícios

6.1 Considere a superfície de revolução parametrizada por

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $v \in (0, 2\pi)$, $u \in I$ e f é uma função positiva. Se a geratriz $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ está parametrizada por comprimento de arco, mostre que

$$K(u, v) = -f''(u)/f(u).$$

6.2 Seja $S = G_f$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e U é um aberto de \mathbb{R}^2 . Mostre que

$$K(x, y) = \frac{\det H(x, y)}{(1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2},$$

onde $H(x, y)$ é a matriz hessiana de f em (x, y) .

- 6.3 (a) Prove que todos os pontos de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ são elípticos.
 (b) Prove que todos os pontos de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ são hiperbólicos.
 (c) Prove que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + y^3\}$ contém pontos de qualquer um dos quatro tipos, determinando-os.

6.4 Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^∞ , considere a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x) + g(y). \end{aligned}$$

Calcule as duas formas fundamentais e classifique os pontos do gráfico de h relacionando, quando possível, a sua natureza com o sentido da concavidade das funções f e g .

6.5 Uma *superfície minimal* é uma superfície cuja curvatura média H é nula em qualquer ponto.

- (a) Seja $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ um mapa conformal (veja o Exercício 5.5) duma superfície S . Prove que S é minimal se e só se o laplaciano $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x, y)$ é sempre nulo.
 (b) Mostre que a superfície de Enneper (Exercício 5.5) é minimal.

6.6 Considere o toro T com o mapa

$$\sigma(u, v) = \left((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \right), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

- (a) Mostre que a curvatura gaussiana e média no ponto $p = \sigma(u, v)$ são dadas por, respectivamente,

$$K(p) = \frac{\cos v}{2 + \cos v} \text{ e } H(p) = \frac{1 + \cos v}{2 + \cos v}.$$

- (b) Prove que T não contém pontos planares e determine os seus pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos. Identifique-os na figura da página 70.
 (c) Diz-se que um ponto p de uma superfície é *umbilical* se as curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são iguais. O toro T possui pontos umbilicais?

6.7 Seja $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma : (0, 1) \times (0, 1) &\longrightarrow S \\ (s, u) &\longmapsto f(s) + uT_f(s). \end{aligned}$$

- (a) Prove que, para cada $s_0 \in (0, 1)$, todos os pontos $\sigma(s_0, u)$, com $u \in (0, 1)$, admitem o mesmo plano tangente.
 (b) Seja $p = \sigma(s, u)$ um ponto arbitrário de S . Mostre que

$$K(p) = 0 \text{ e } H(p) = \frac{\tau_f(s)}{2u\kappa_f(s)}.$$

Classifique os pontos de S .

6.8 Sendo $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ ($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) um polinómio arbitrário de grau 2 nas duas variáveis x e y , considere

$$S_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = p(x, y)\}.$$

- (a) Mostre que S_p é uma superfície.
 (b) Prove que, para cada p , todos os pontos de S_p são elípticos ou todos os pontos de S_p são hiperbólicos ou todos os pontos de S_p são planares ou parabólicos.
 Para que polinómios p é que os pontos de S_p são todos elípticos? E hiperbólicos?

6.9 Prove que:

- (a) Todo o ponto umbilical (Exercício 6.6) é planar ou elíptico.
 (b) Se a superfície é minimal (Exercício 6.5) então todo o ponto umbilical é planar.
 (c) Todo o ponto da esfera S^2 é umbilical.

6.10 Seja $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ um mapa de uma superfície S e $p = \sigma(q)$ um ponto de S . Denote por \mathcal{F}_I e \mathcal{F}_{II} , respectivamente, as matrizes da primeira e da segunda formas fundamentais de σ em p . Prove que:

(a)

$$\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) = a \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \text{ e } \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) = c \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + d \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

é a matriz de Weingarten $\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$ do mapa σ .

(b) Se p é umbilical, ou seja, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = \kappa$, então:

- (i) $\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_I$ e, portanto, todo o vector tangente a S em p é um vector principal;
 (ii)

$$\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) = \kappa \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \text{ e } \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) = \kappa \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q).$$

(c) Se S é uma superfície (conexa) na qual todo o ponto é umbilical e $\kappa(q)$ denota o valor comum das curvaturas principais em cada $p = \sigma(q)$ então:

(i)

$$\frac{\partial \kappa}{\partial y}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) = \frac{\partial \kappa}{\partial x}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q);$$

(ii) κ é constante;

(iii) S é parte de um plano ou de uma esfera.

7. O Teorema Egregium de Gauss

Estamos agora em condições de provar um dos teoremas mais importantes do século XIX. Os matemáticos no final do século XVIII, como Euler e Monge, já usavam a curvatura Gaussiana, mas somente como produto das curvaturas principais da superfície. Como cada uma delas depende da segunda forma fundamental, ou seja, do modo particular como a superfície S está mergulhada em \mathbb{R}^3 , não existe nenhuma razão aparente para supor que o produto das curvaturas principais é intrínseco a S . A descoberta de Gauss, publicada em 1827, de que o produto das curvaturas principais só depende da geometria intrínseca da superfície revolucionou a geometria diferencial.

Ao longo desta secção, para tornar menos pesada a escrita das fórmulas, dada uma aplicação $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave, usaremos as notações

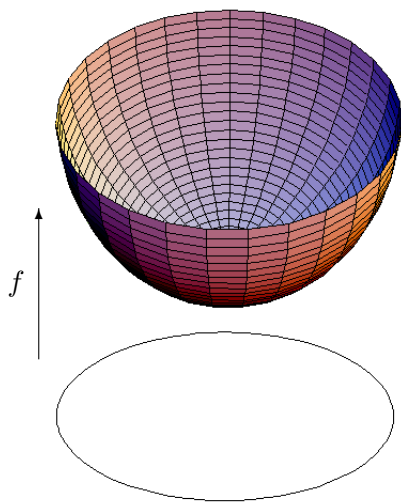
$$\sigma_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \sigma_y = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

Exemplo 7.1. Sejam

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\}$$

e $f : S_1 \rightarrow S_2$ definida por $f(x, y, 0) = (x, y, x^2 + y^2)$.



Denotando o aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ de \mathbb{R}^2 por U , $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$, definida por $\sigma_1(x, y) = (x, y, 0)$, é uma parametrização global de S_1 , enquanto $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ é uma parametrização global de S_2 . Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) &= (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 0), \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) &= (1, 0, 2x), \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 2y), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= 1, F_1(x, y) = 0, G_1(x, y) = 1, \\ E_2(x, y) &= 1 + 4x^2, F_2(x, y) = 4xy, G_2(x, y) = 1 + 4y^2, \end{aligned}$$

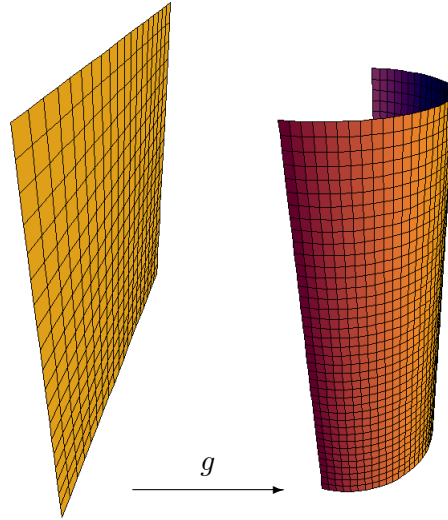
peço que f não é uma isometria.

Exemplo 7.2. Sejam agora

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\},$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e $g : T_1 \rightarrow T_2$ definida por $g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z)$.



Tomando o aberto $U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \pi/2\}$, a parametrização global de T_1 , $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\sigma_1(x, z) = (x, 0, z)$, e a correspondente parametrização global $\sigma_2 = g \circ \sigma_1$ de T_2 , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, z) &= (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(x, z) = (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, z) &= (\cos x, -\sin x, 0), \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(x, z) = (0, 0, 1), \\ E_1(x, z) &= 1, F_1(x, z) = 0, G_1(x, z) = 1, \\ E_2(x, z) &= 1, F_2(x, z) = 0, G_2(x, z) = 1. \end{aligned}$$

Assim, neste caso, g é uma isometria.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2}(x, z) &= \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x \partial z}(x, z) = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial z^2}(x, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}(x, z) &= (-\sin x, -\cos x, 0), \quad \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x \partial z}(x, z) = \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial z^2}(x, z) = 0, \end{aligned}$$

$$N_{\sigma_2}(x, y, z) = (-\sin x, -\cos x, 0),$$

donde

$$e_1(x, z) = f_1(x, z) = g_1(x, z) = 0$$

e

$$e_2(x, z) = -(N_{\sigma_2}(x, y, z) | \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}(x, z)) = -1 \neq 0.$$

Portanto, g não preserva a segunda forma fundamental apesar de ser uma isometria.

No Exemplo 7.2, temos uma folha de papel plana T_1 que é transformada em metade de um cilindro T_2 . A folha foi simplesmente arqueada, tendo-se somente modificado a sua relação com o espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Este facto é descrito pelo seguinte: a primeira forma fundamental não foi alterada; a segunda forma foi alterada.

Dizemos que a primeira forma fundamental de uma superfície S descreve a *geometria intrínseca* de S e que a segunda forma fundamental descreve a *geometria extrínseca* de S .

À aplicação $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, tomando para $d_S(p_1, p_2)$ o ínfimo dos comprimentos das curvas $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tais que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$, chama-se *distância intrínseca* da superfície S . Trata-se, de facto, de uma métrica em S (cf. [8], Prop. 413).

É evidente que uma isometria preserva sempre a distância intrínseca. Contudo poderá não preservar a distância “extrínseca”, como acontece no exemplo acima: sendo d a distância euclidiana de \mathbb{R}^3 , dados $p_1, p_2 \in T_1$, não é verdade que $d(g(p_1), g(p_2)) = d(p_1, p_2)$. Por outro lado, a transformação f do Exemplo 7.1 (na qual a superfície S_1 foi transformada em metade de uma esfera) altera a geometria intrínseca da superfície, ou seja, a sua primeira forma fundamental, como vimos. Note que neste caso existem pontos $p_1, p_2 \in S_1$ tais que $d_{S_2}(f(p_1), f(p_2)) > d_{S_1}(p_1, p_2)$. O facto de g preservar a curvatura de Gauss não é acidental. O Teorema de Gauss, que provaremos em seguida, mostra que a curvatura de Gauss é invariante por isometria.

Para demonstrar este resultado clássico fundamental necessitamos de introduzir os chamados símbolos de Christoffel. Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S . Consideremos ainda o referencial

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), N(p) \right\}$$

definido em cada ponto $p = \sigma(q)$ da superfície S . Existem funções Γ_{jk}^i , $i, j, k = 1, 2$, $L_1, L_2, \bar{L}_2, L_3, a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$ tais que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + L_1 N \\ \sigma_{xy} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + L_2 N \\ \sigma_{yx} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + \bar{L}_2 N \\ \sigma_{yy} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_x + \Gamma_{22}^2 \sigma_y + L_3 N \\ N_x &= a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y \\ N_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

As funções Γ_{jk}^i dizem-se os *símbolos de Christoffel* de S relativamente à parametrização σ . Note que

$$\begin{aligned} L_1 &= (\sigma_{xx}|N) = e, \\ L_2 &= (\sigma_{xy}|N) = f, \\ \bar{L}_2 &= L_2 = f, \\ L_3 &= (\sigma_{yy}|N) = g. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Como $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ e σ_x, σ_y, N são linearmente independentes,

$$\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i, \quad i = 1, 2.$$

Lema 7.3. *Os símbolos de Christoffel de uma superfície S relativamente a uma parametrização σ estão relacionados com a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_x, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_x - \frac{1}{2} E_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_y, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_y - \frac{1}{2} G_x, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_x, \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_y. \end{cases}$$

Demonstração: As primeiras seis são imediatas de (7.2.1):

- $\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \Gamma_{11}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{11}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{xx}|\sigma_x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_x.$
- $\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \Gamma_{11}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{11}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{xx}|\sigma_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x|\sigma_y) - (\sigma_x|\sigma_{xy}) = F_x - \frac{1}{2} E_y.$
- $\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \Gamma_{12}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{12}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{xy}|\sigma_x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_y.$
- $\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \Gamma_{12}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{12}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{xy}|\sigma_y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \Gamma_{22}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{22}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{yy}|\sigma_x) = \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y|\sigma_x) - (\sigma_y|\sigma_{yx}) = F_y - \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \Gamma_{22}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{22}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{yy}|\sigma_y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_y.$

As duas últimas são consequência das anteriores; provemos a primeira delas (a outra pode provar-se de forma análoga):

$$\begin{aligned}
(EG - F^2)_x &= EG_x + E_xG - 2FF_x \\
&= 2E(\Gamma_{12}^1F + \Gamma_{12}^2G) + 2G(\Gamma_{11}^1E + \Gamma_{11}^2F) - 2F(\Gamma_{11}^1F + \Gamma_{11}^2G + \Gamma_{12}^1E + \Gamma_{12}^2F) \\
&= 2EG\Gamma_{12}^2 + 2EG\Gamma_{11}^1 - 2F^2(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
&= 2(EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2).
\end{aligned}$$

Então

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(EG - F^2)_x}{2(EG - F^2)} = (\log \sqrt{EG - F^2})_x. \quad \blacksquare$$

Resolvendo cada um dos três primeiros sistemas do Lema 7.3, relativamente aos símbolos de Christoffel, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_x - EE_y - FE_x}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_x - FE_y}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_y - GG_x - FG_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_y - 2FF_y + FG_x}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2.
\end{array} \right. \quad (7.3.1)$$

Isto mostra que os símbolos de Christoffel só dependem de E, F, G e das suas derivadas, pelo que são invariantes por isometria, pelo Teorema 5.2.

Teorema 7.4. [Teorema Egregium de Gauss] *A curvatura de Gauss é invariante por isometria.*

Demonstração: Decorre de (7.2.1) e da definição da matriz de Weingarten na página 123 (nomeadamente da igualdade $N_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y$) que

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxy} &= (\Gamma_{11}^1\sigma_x + \Gamma_{11}^2\sigma_y + eN)_y \\
&= \Gamma_{11y}^1\sigma_x + \Gamma_{11y}^2\sigma_y + e_yN + \Gamma_{11}^1\sigma_{xy} + \Gamma_{11}^2\sigma_{yy} + eN_y \\
&= \Gamma_{11y}^1\sigma_x + \Gamma_{11y}^2\sigma_y + e_yN + \\
&\quad \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\sigma_x + \Gamma_{12}^2\sigma_y + fN) + \\
&\quad \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\sigma_x + \Gamma_{22}^2\sigma_y + gN) + \\
&\quad e(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y) \\
&= (\Gamma_{11y}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ea_{12})\sigma_x + \\
&\quad (\Gamma_{11y}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22})\sigma_y + \\
&\quad (e_y + \Gamma_{11}^1f + \Gamma_{11}^2g)N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xyx} &= (\Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + fN)_x \\
&= \Gamma_{12x}^1 \sigma_x + \Gamma_{12x}^2 \sigma_y + f_x N + \Gamma_{12}^1 \sigma_{xx} + \Gamma_{12}^2 \sigma_{yx} + f N_x \\
&= \Gamma_{12x}^1 \sigma_x + \Gamma_{12x}^2 \sigma_y + f_x N + \\
&\quad \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + eN) + \\
&\quad \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + fN) + \\
&\quad f(a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y) \\
&= (\Gamma_{12x}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) \sigma_x + \\
&\quad (\Gamma_{12x}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}) \sigma_y + \\
&\quad (f_x + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f) N.
\end{aligned}$$

Como $\sigma_{xxy} = \sigma_{xyx}$ e σ_x, σ_y, N são linearmente independentes, podemos concluir que

$$(\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21},$$

ou seja,

$$(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = a_{22} e - f a_{21}.$$

Consequentemente, da definição da matriz de Weingarten na página 123,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= -\frac{fF - gE}{EG - F^2} e + f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\
&= E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= EK.
\end{aligned}$$

De modo análogo, das igualdades $\sigma_{yyx} = \sigma_{yxy}$ e $N_{xy} = N_{yx}$, é possível formular FK e GK em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas, logo, por (7.3.1), em função de E, F, G e das suas derivadas. Como as funções E, F, G não se podem anular simultaneamente, podemos concluir que a curvatura de Gauss K de uma superfície regular só depende das funções E, F, G e das suas derivadas sendo, assim, invariante por isometria. ■

Como as definições de ponto elíptico e de ponto hiperbólico só dependem da curvatura de Gauss, uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos hiperbólicos em pontos hiperbólicos.

O mesmo não acontece com os pontos planares e parabólicos. Com efeito, as noções de ponto planar e ponto parabólico não são invariantes por isometria: dependem não só da primeira forma fundamental da superfície, mas também da segunda forma fundamental. Por exemplo, a isometria g do Exemplo 7.2 transforma pontos planares em pontos parabólicos (Exercício 7.2).

Exemplos. (1) A parametrização $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do cilindro, definida por

$$\sigma(u, v) = (\cos(u/a), \sin(u/a), av),$$

pode ser vista como um difeomorfismo entre o plano e o cilindro. Como vimos na Secção 5, em ambas as superfícies $E = G = 1$ e $F = 0$ pelo que σ é uma isometria. Por outro lado, σ não preserva nem a segunda forma fundamental nem a curvatura média.

(2) Temos agora outra justificação para o facto observado na Secção 5 de que não existe nenhuma isometria entre uma esfera e um plano: a curvatura de Gauss de uma esfera é diferente de zero, enquanto a de um plano é nula. Aqui reside a razão fundamental pela qual qualquer mapa plano de qualquer região da Terra distorce sempre as distâncias.

(3) O helicóide (Exercício 3.9), parametrizado por

$$\text{helicóide}_{a,b}(x, y) = (ay \cos x, ay \sin x, bx),$$

é isométrico ao catenóide (Exercício 4.2), parametrizado por

$$\text{catenóide}_t c(x, y) = (c \cos x \cosh(y/c), c \sin x \cosh(y/c), y),$$

pois estas duas superfícies são o estado inicial e o estado final de uma deformação entre superfícies (minimais) isométricas. Com efeito, para cada $t \in [0, \pi/2]$, seja

$$\text{helparacat}_t(x, y) = \cos t(\sinh y \sin x, -\sinh y \cos x, x) + \sin t(\cosh y \cos x, \cosh y \sin x, y).$$

É óbvio que

$$\text{helparacat}_0(x, y) = \text{helicóide}_{1,1}(x - \pi/2, \sinh y),$$

$$\text{helparacat}_{\pi/2}(x, y) = \text{catenóide}_1(x, y).$$

É ainda fácil verificar que a primeira forma fundamental de helparacat_t é dada por

$$E_t(x, y) = G_t(x, y) = \cosh^2 y, F_t(x, y) = 0,$$

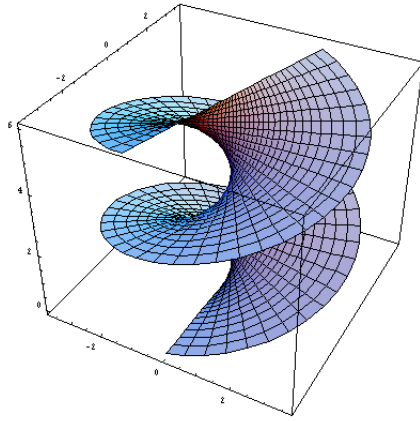
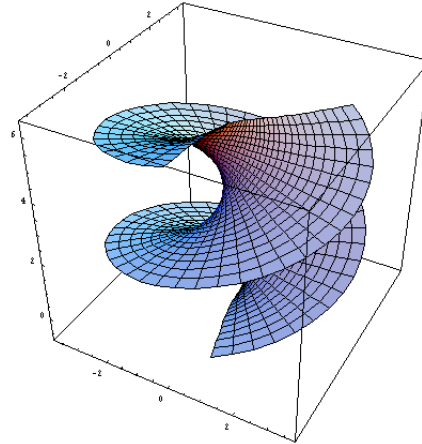
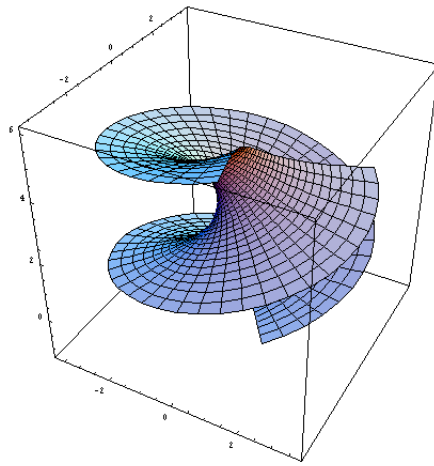
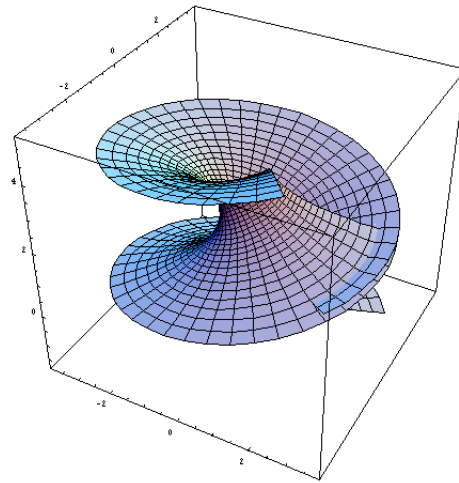
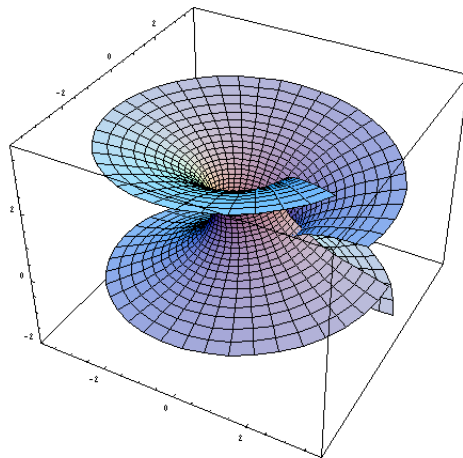
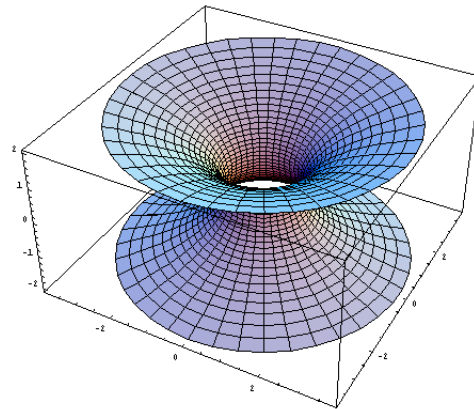
sendo pois uma função (de t) constante. Isto mostra que a sequência de superfícies helparacat_t , $0 \leq t \leq \pi/2$, é uma deformação do helicóide para o catenóide tal que helparacat_0 é uma reparametrização de um helicóide, $\text{helparacat}_{\pi/2}$ é um catenóide e cada helparacat_t é uma superfície isométrica a helparacat_0 . Assim, em particular, o helicóide é isométrico ao catenóide.

Por outro lado, como a segunda forma fundamental, que é dada por

$$e_t(x, y) = -g_t(x, y) = \sin t, f_t(x, y) = \cos t,$$

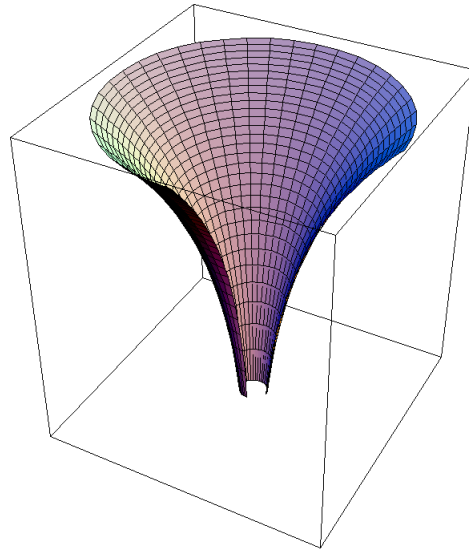
não é função constante de t , a imersão de helparacat_t em \mathbb{R}^3 depende de t .

As figuras seguintes mostram sucessivos passos da deformação $t \rightarrow \text{helparacat}_t$.

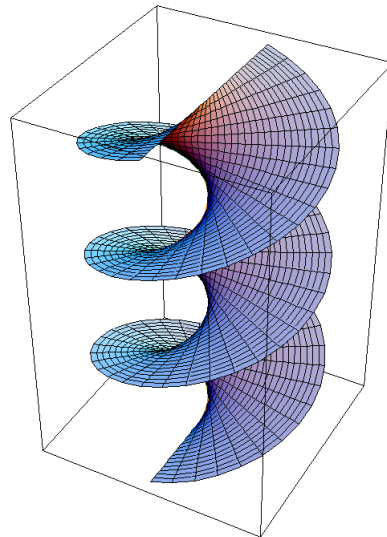
*helicóide**heliparacat $_{\pi/10}$* *heliparacat $_{\pi/5}$* *heliparacat $_{3\pi/10}$* *heliparacat $_{2\pi/5}$* *catenóide*

(4) O Teorema de Gauss estabelece que cada isometria preserva sempre a curvatura de Gauss. Existem, contudo, difeomorfismos que preservam a curvatura de Gauss mas não

são isometrias. Um exemplo clássico de um tal morfismo é a aplicação Φ , definida por $\Phi(ay \cos x, ay \sin x, b \log y) = (ay \cos x, ay \sin x, bx)$, da superfície de um funil



parametrizada por $(x, y) \rightarrow (ay \cos x, ay \sin x, b \log y)$, para o helicóide



parametrizado por $(x, y) \rightarrow (ay \cos x, ay \sin x, bx)$.

Calculando a curvatura de Gauss de ambas as superfícies chegamos ao mesmo resultado

$$K(x, y) = \frac{-b^2}{b^2 + a^2 y^2}.$$

Portanto, Φ é um difeomorfismo que preserva a curvatura de Gauss. Contudo, Φ não é uma isometria, porque, no caso do funil,

$$E(x, y) = a^2 y^2, F(x, y) = 0, G(x, y) = a^2 + \frac{b^2}{y^2}$$

e, no caso do helicóide,

$$E(x, y) = b^2 + a^2 y^2, F(x, y) = 0, G(x, y) = a^2.$$

Isto mostra que o recíproco do Teorema de Gauss não é válido.

(5) Como observámos no Exemplo 6.4(6), qualquer rotação em torno do eixo OZ da sela de macaco preserva a curvatura de Gauss. Pode ser verificado que somente as rotações de um ângulo múltiplo de $2\pi/3$ são isometrias. Este exemplo também mostra que o recíproco do Teorema de Gauss é falso.

Exercícios

- 7.1 Seja $\gamma(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$, $t \in I$, uma curva regular. Suponhamos que $\varphi(t) > 0$ para qualquer $t \in I$. Determine os símbolos de Christoffel da superfície de revolução gerada pela curva γ .
- 7.2 Mostre que a isometria g do Exemplo 7.2 transforma pontos planares em pontos parabólicos.
- 7.3 Mostre, usando o Teorema Egregium de Gauss, que as seguintes superfícies regulares não são localmente isométricas duas a duas:
 - (a) O plano.
 - (b) A esfera.
 - (c) A superfície $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

Bibliografia

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [2] G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, Gauthier-Villars, 1887.
- [3] P. Dombrowski, *150 years after Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Astérisque 62 (1979).
- [4] K. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, 1965.
- [5] A. Goetz, *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1968.
- [6] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993.
- [7] W. Kühnel, *Differential Geometry - Curves, Surfaces, Manifolds*, American Mathematical Society, 2002.
- [8] O. Neto, *Tópicos de Geometria*, Universidade Aberta, 1999.
- [9] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, American Mathematical Society, 2000.
- [10] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- [11] J. J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, 1969.