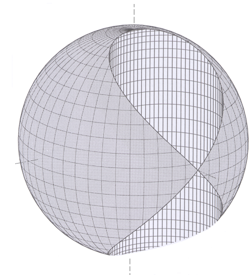
Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Considere a curva de Viviani $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$. Mostre que:

   (a) γ está contida na intersecção do cilindro de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

   (b) γ tem curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$ e torsão $\tau(t) = \frac{6\cos\frac{t}{2}}{13+3\cos t}$.

2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$.

   (b) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$, é uma circunferência de raio 1.

   (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à hélice $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ.

   (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 - y^2$.

   (e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ é uma superfície.

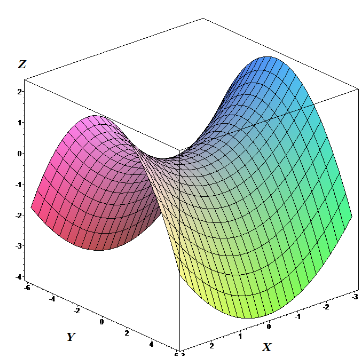
3. (a) Seja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa da superfície S contendo o ponto p. Justifique que, sendo (u_0, v_0) as coordenadas de p em U, todo o vector tangente a S em p é gerado pelos vectores $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$.

   (b) Seja $\sigma : (0,2) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (1,0,1)$. O vector $(-1,-1,1)$ é tangente a S no ponto p?

4. Dada uma aplicação suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (onde U é um conjunto aberto), considere a superfície $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$.

   (a) Classifique os pontos de G_f relativamente a $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

   (b) O parabolóide hiperbólico $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 - y^2\}$ contém pontos que não sejam hiperbólicos?

   (c) Mostre que a área de G_f é igual a $\displaystyle\int\int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$.