Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

*Duração: 2h30m* Soluções

---

1. Considere a curva de Viviani $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$. Mostre que:

   (a) $\gamma$ está contida na intersecção do cilindro de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

   (b) $\gamma$ tem curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$ e torsão $\tau(t) = \frac{6 \cos \frac{t}{2}}{13+3\cos t}$.

Solução

2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$.

   (b) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$, é uma circunferência de raio 1.

   (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à hélice $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo $OZ$.

   (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.

   (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ é uma superfície.

Solução

3. (a) Seja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ um mapa da superfície $S$ contendo o ponto $p$. Justifique que, sendo $(u_0, v_0)$ as coordenadas de $p$ em $U$, todo o vector tangente a $S$ em $p$ é gerado pelos vectores $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$.

   (b) Seja $\sigma : (0, 2)\times(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u\cos v, u \sin v, u)$, um mapa de uma superfície cónica $S$ contendo o ponto $p = (1, 0, 1)$. O vector $(-1, -1, 1)$ é tangente a $S$ no ponto $p$?

Solução

4. Dada uma aplicação suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (onde $U$ é um conjunto aberto), considere a superfície $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.

   (a) Classifique os pontos de $G_f$ relativamente a $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

   (b) O parabolóide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 - y^2\}$ contém pontos que não sejam hiperbólicos?

   (c) Mostre que a área de $G_f$ é igual a $\displaystyle\int\int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$.

Solução

---

Sugestão de resolução

---

1. (a) Basta verificar que $(x-1)^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ e

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= (1+\cos t)^2+\sin^2 t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= 1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= 2+2\cos t+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= 2+2\cos\Big(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\Big)+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= 2+2\Big(\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)-\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)+4\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= 2+2\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)+2\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)=2+2=4.
\end{aligned}$$

(b) $\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,\cos\frac{t}{2})$, $\gamma''(t)=(-\cos t,-\sin t,-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})$ e $\gamma'''(t)=(\sin t,-\cos t,-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2})$, donde

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)},$$

$$\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)=\Big(-\frac{1}{2}\cos t\sin\frac{t}{2}+\sin t\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin t\sin\frac{t}{2}-\cos t\cos\frac{t}{2},1\Big),$$

$$\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|=\sqrt{1+\frac{1}{4}\sin^2\Big(\frac{t}{2}\Big)+\cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)}$$

e

$$[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]=\sin^2 t\cos\frac{t}{2}+\cos^2 t\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}=\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}.$$

De $\cos t=\cos(\frac{t}{2}+\frac{t}{2})=\cos^2(\frac{t}{2})-\sin^2(\frac{t}{2})=\cos^2(\frac{t}{2})-(1-\cos^2(\frac{t}{2}))=2\cos^2(\frac{t}{2})-1$ conclui-se que $\cos^2(\frac{t}{2})=\frac{1+\cos t}{2}$ e, consequentemente, $\sin^2(\frac{t}{2})=1-\cos^2(\frac{t}{2})=\frac{1-\cos t}{2}$. Então

$$\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\sqrt{1+\frac{1-\cos t}{8}+\frac{1+\cos t}{2}}}{(1+\frac{1+\cos t}{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\tau(t)=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{1+\frac{1}{4}\sin^2(\frac{t}{2})+\cos^2(\frac{t}{2})}=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{1+\frac{1-\cos t}{8}+\frac{1+\cos t}{2}}=\frac{\frac{3}{4}\cos\frac{t}{2}}{\frac{13+3\cos t}{8}}=\frac{6\cos\frac{t}{2}}{13+3\cos t}.$$

2. (a) Verdadeira:
Como $\gamma'(t)=(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)$, então

$$\|\gamma'(t)\|^2=e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2=e^{-2t}+e^{-2t}=2e^{-2t}.$$

Portanto,

$$\int_0^t\|\gamma'(u)\|\,du=\int_0^t\sqrt{2}e^{-u}\,du=\sqrt{2}[-e^{-u}]_0^t=\sqrt{2}(-e^{-t}+1),$$

pelo que $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\|\gamma'(u)\|\,du=\sqrt{2}$.

(b) Verdadeira:

A curva está parametrizada por comprimento de arco: para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(t)\| = \|(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)\| = 1$. Assim,

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)\| = 1.$$

Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{4}{5}\sin s & -\cos s & \frac{3}{5}\sin s \\ -\frac{4}{5}\cos s & \sin s & \frac{3}{5}\cos s \end{vmatrix} &= \Big(-\frac{3}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{4}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s)\Big) \\ &= \Big(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\Big). \end{aligned}$$

Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, pelo que a curva é plana. Como a curvatura é constante, igual a 1, terá que ser uma circunferência de raio 1.

(c) Verdadeira:

A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0,0,1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r\cos t, -r \operatorname{sen} t, 0)$.

(d) Falsa:

O gradiente $\nabla_f(x,y,z)$ de $f$ no ponto $(x,y,z)$ é o vector $(2x, -2y, 0)$, que se anula nos pontos $(0,0,z)$ $(z \in \mathbb{R})$. No entanto, todos estes pontos pertencem a $f^{-1}(\{0\})$.

(e) Falsa:

Atendendo ao resultado da alínea anterior não podemos aplicar o critério do valor regular. Contudo podemos observar directamente que não se trata de uma superfície pois, sendo a união de dois planos ($x = y$ e $x = -y$) que se intersectam, tem pontos de auto-intersecção pelo que não satisfaz a definição de superfície.

3. (a) Seja $v$ um vector tangente a $S$ em $p$ e seja $\sigma : U \to W \subseteq S$ um mapa de $S$ contendo o ponto $p$. Por definição de vector tangente existe uma curva $\gamma : (a,b) \to W$ e $t_0 \in (a,b)$ tais que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição $(a,b) \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W$. Denotando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\overline{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} J_\gamma(t_0) = J_\sigma(u_0,v_0) \cdot J_{\overline{\gamma}}(t_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \\ \gamma_3'(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(u_0,v_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(u_0,v_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(u_0,v_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\gamma}_1'(t_0) \\ \overline{\gamma}_2'(t_0) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad v = \overline{\gamma}_1'(t_0)\frac{\partial \sigma}{\partial x}(u_0,v_0) + \overline{\gamma}_2'(t_0)\frac{\partial \sigma}{\partial y}(u_0,v_0). \end{aligned}$$

(b) Como $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = (\cos v, \sin v, 1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 0)$, então, em $p = \sigma(1,0)$, temos $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(1,0) = (1,0,1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(1,0) = (0,1,0)$. Portanto $(-1,-1,1)$ será tangente a $S$ em $p$ se e só se for combinação linear dos vectores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$, ou seja, for do tipo $(\alpha, \beta, \alpha)$ para algum par de reais $\alpha$ e $\beta$, o que não é o caso.

4. (a) A superfície $G_f$ admite a parametrização global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$. Calculemos a primeira forma fundamental de $\sigma$:

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \Big((1,0,f_x) \mid (1,0,f_x)\Big) = 1 + f_x^2, \\ F(x,y) &= \Big((1,0,f_x) \mid (0,1,f_y)\Big) = f_x f_y, \\ G(x,y) &= \Big((0,1,f_y) \mid (0,1,f_y)\Big) = 1 + f_y^2. \end{aligned}$$

Como

$$N(x,y) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y)}{\|\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y)\|} = \frac{(1,0,f_x) \wedge (0,1,f_y)}{\|(1,0,f_x) \wedge (0,1,f_y)\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

então

$$\begin{aligned} e(x,y) &= -\Big(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x,y) \mid N(x,y)\Big) = -\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ f(x,y) &= -\Big(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x,y) \mid N(x,y)\Big) = -\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ g(x,y) &= -\Big(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x,y) \mid N(x,y)\Big) = -\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \frac{e(x,y)g(x,y) - [f(x,y)]^2}{E(x,y)G(x,y) - [F(x,y)]^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}, \\ H(x,y) &= \frac{E(x,y)g(x,y) - 2f(x,y)F(x,y) + G(x,y)e(x,y)}{2(E(x,y)G(x,y) - [F(x,y)]^2)} \\ &= \frac{-(1+f_x^2)f_{yy} + 2f_{xy}f_x f_y - (1+f_y^2)f_{xx}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

- $p = \sigma(x,y)$ é elíptico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$.
- $p = \sigma(x,y)$ é hiperbólico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$.
- $p = \sigma(x,y)$ é parabólico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ e $H(x,y) \neq 0$.
- $p = \sigma(x,y)$ é planar se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ e $H(x,y) = 0$.

(b) Não, pois nesse caso $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4 < 0$.

(c) Numa superfície orientável, a área de uma região $\mathcal{R}$ abrangida por uma parametrização $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, em função da primeira forma fundamental de $\sigma$, é dada pela fórmula

$$\int\int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Portanto, no caso de $G_f$, como $\sigma^{-1}(G_f) = U$, é dada por

$$\int\int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$