Ano lectivo 2005/06 **Exame de Geometria Diferencial**

*Duração: 2h30m* 21/7/06

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}\, t^2, t^3)$.

   (a) Determine o seu vector tangente. Qual é a velocidade de $\gamma$ no instante $t$?

   (b) Sendo $t > 0$, designe por $s(t)$ o comprimento de $\gamma$ no intervalo $[0, t]$. Quanto vale $s(t)$?

   (c) A curva $\gamma$ está parametrizada por comprimento de arco? Em caso negativo, reparametrize-a por comprimento de arco.

   (d) $\gamma$ é plana?

   (e) Quando é que uma curva se diz uma hélice generalizada? Nesse caso, o que é o seu eixo?

   (f) Mostre que $\gamma$ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo?

2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) Em qualquer curva parametrizada por comprimento de arco, $N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$.

   (b) O traço de qualquer curva com curvatura constante está contido numa circunferência.

   (c) A identidade $\kappa_s(s) = \theta'(s)$ vale para qualquer curva plana parametrizada por comprimento de arco (onde $\theta(s)$ é a medida do ângulo do vector $(1, 0)$ para $T(s)$, marcado no sentido positivo).

   (d) Todo o difeomorfismo equiareal é uma isometria.

3. (a) Seja $S = f^{-1}(a)$ uma superfície, onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave e $a \in f(U)$ é um valor regular de $f$, e seja $p$ um ponto de $S$. Deduza uma equação para o plano tangente a $S$ em $p$ em termos do gradiente $\nabla_f(p)$ de $f$ em $p$.

   (b) Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

      (i) Justifique que $C$ é uma superfície.

      (ii) Determine uma equação para o plano tangente a $C$ em $p = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Verifique se o ponto $(1, 1, 0)$ pertence à recta normal a $C$ em $p$.

4. Considere uma superfície de revolução $S$ parametrizada por

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & ]0, 2\pi[\times I & \longrightarrow & S \\ & (u, v) & \longmapsto & (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \end{array}$$

   onde $f : I \to \mathbb{R}$ é positiva e a geratriz $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $v \mapsto (f(v), 0, g(v))$ está parametrizada por comprimento de arco.

   (a) Calcule a primeira forma fundamental de $\sigma$.

   (b) Determine um campo de vectores normais unitários de $S$.

   (c) Mostre que $S$ é parte de um cilindro circular ou de um cone circular se e só se todo o ponto de $S$ é parabólico.