Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 2A** 3/04/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Rodando 90°, no sentido positivo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, -v_1)$.

V	F
	×

   `[O vector que se obtem é o vector` $(-v_2, v_1)$ `e não` $(-v_2, -v_1)$ `(este é o resultado de uma rotação de` 180^0`).]`

   (b) Se todo o plano normal de $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ passa por um ponto fixo então γ é uma curva esférica.

V	F
×	

   `[Exercício I.3.16 feito nas aulas.]`

   (c) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_a(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, at^3)$ é uma hélice generalizada para $a = 0, 1, 2$.

V	F
	×

   `[A afirmação é falsa porque` γ_a `não é uma hélice generalizada para` $a = 2$`: neste caso,` $\tau(t)/\kappa(t) = 2((\frac{16}{9} + 16t^2 + 144t^4)/(\frac{16}{9} + 64t^2 + 144t^4))^{\frac{3}{2}}$ `não é constante.`
   `Mais geralmente, como` $[\gamma_a'(t), \gamma_a''(t), \gamma_a'''(t)] = 8a$, $\|\gamma_a'(t)\| = (\frac{4}{9} + 4t^2 + 9a^2t^4)^{\frac{1}{2}}$ `e` $\|\gamma_a'(t) \wedge \gamma_a''(t)\| = (\frac{16}{9} + 16a^2t^2 + 36a^2t^4)^{\frac{1}{2}}$`, então` $\tau(t)/\kappa(t)$ `é igual a` $8a((\frac{4}{9} + 4t^2 + 9a^2t^4)/(\frac{16}{9} + 16a^2t^2 + 36a^2t^4))^{\frac{3}{2}}$`, que é constante exactamente para` $a = 0$, $a = 1$ `e` $a = -1$`.]`

   (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz = 1\}$ é uma superfície.

V	F
×	

   `[A afirmação é verdadeira pois` $S = f^{-1}(\{1\})$`, para` $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ `definida por` $f(x, y, z) = 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz$`, e 1 é valor regular de` f`: o gradiente` $\nabla_f(x, y, z) = (4x + 2y, 2x - 2z, -2z - 2y)$ `só se anula em` $(0, 0, 0)$ `e este ponto não pertence a` S`.]`

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t^2, -t + t^2, -t + 2)$.

(a) Prove que γ é plana.

γ é plana se e só se a sua torsão for constantemente nula. Como

$$\tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

e $\gamma'''(t) = 0$ então $\tau(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a equação do plano osculador a γ em t e averigue se existe algum ponto onde esse plano seja paralelo ao plano XOY.

O plano osculador de γ em cada ponto $\gamma(t)$ é o plano que passa por $\gamma(t)$ paralelo à tangente $T(t)$ e à normal $N(t)$, ou seja, é o plano que passa por $\gamma(t)$ e é ortogonal à binormal $B(t)$. Como

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|},$$

então a direcção de $B(t)$ é dada pelo vector $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (2, -2, 2)$, ou, o que é o mesmo, pelo vector $(1, -1, 1)$. Portanto o plano osculador em $\gamma(t)$ é definido pela equação

$$((x, y, z) - (t^2, -t + t^2, -t + 2) \mid (1, -1, 1)) = 0,$$

ou seja, $x - y + z = 2$. Este plano (que é sempre o mesmo em qualquer t) não é paralelo ao plano XOY. Em conclusão, em nenhum ponto da curva o plano osculador é paralelo ao plano horizontal XOY.

Alternativa (evitando o cálculo do plano osculador):

O plano osculador será paralelo ao plano horizontal XOY se e só se for ortogonal ao vector vertical $(0, 0, 1)$. Como o plano osculador é ortogonal a $(1, -1, 1)$, isso será verdade se e só se os vectores $(1, -1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ forem paralelos, o que não é verdade.