Duração: 30m **Teste 2B** 3/04/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para qualquer curva plana $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco, $\kappa_s(s) = \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)$.

V	F
×	

   `[Corolário 4.3, p. 43.]`

   (b) Rodando 90°, no sentido negativo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, v_1)$.

V	F
	×

   [O vector que se obtem é o vector $(v_2, -v_1)$ e não $(-v_2, v_1)$ (este é o resultado de uma rotação de 90^0, mas no sentido positivo).]

   (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à curva $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ.

V	F
×	

   [Exercício 3.23 (b): A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0,0,1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r\cos t, -r \operatorname{sen} t, 0)$.]

   (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

V	F
	×

   [É falso, uma vez que o gradiente $\nabla_f(x,y,z)$ de f no ponto (x,y,z) é o vector $(2x, 2y, 2z)$, que só se anula em $(0,0,0)$, mas este ponto pertence a $f^{-1}(\{0\})$.]

2. (a) Qual é a propriedade geométrica que define as hélices generalizadas $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Como se caracterizam estas curvas em termos da curvatura e da torsão?

   Uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ diz-se uma hélice generalizada quando existe um vector unitário u (o chamado eixo da hélice) tal que o produto escalar $(u \mid T(t))$ é independente do parâmetro t. Equivalentemente, uma curva γ é uma hélice generalizada se e só se o quociente $\tau(t)/\kappa(t)$ é independente de t.

(b) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave, considere a curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^t \operatorname{sen} f(r) dr, \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^t \cos f(r) dr, \frac{\sqrt{2}}{2} t \right). \end{array}$$

Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo?

Como $\gamma'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} f(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos f(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, então $\|\gamma'(t)\| = 1$. Portanto,

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] \cdot \|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^3} = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^3}.$$

Como

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \left(\frac{1}{2} f'(t) \operatorname{sen} f(t), \frac{1}{2} f'(t) \cos f(t), -\frac{1}{2} f'(t) \right),$$

então $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{2} f'(t)$. Finalmente,

$$\gamma'''(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} f''(t) \cos f(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} (f'(t))^2 \operatorname{sen} f(t), -\frac{\sqrt{2}}{2} f''(t) \operatorname{sen} f(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} (f'(t))^2 \cos f(t), 0 \right),$$

pelo que $[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = -\frac{\sqrt{2}}{4} (f'(t))^3$. Portanto, $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = -1$, o que mostra que a curva é, de facto, uma hélice generalizada de eixo $u = cT(t) + \sqrt{1 - c^2} B(t)$ onde $c = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} T(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} B(t) = (0, 0, -1)$.

Alternativa (evitando o cálculo do quociente $\tau(t)/\kappa(t)$):

Como

$$\gamma'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} f(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos f(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

então $\|\gamma'(t)\| = 1$ e a curva está parametrizada por comprimento de arco. Portanto $T(t) = \gamma'(t)$. Basta então considerar $u = (0, 0, 1)$: o produto escalar $(u \mid T(t))$ é constante (igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$) pelo que γ é uma hélice generalizada de eixo vertical $(0, 0, 1)$.