Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 3A** 27/04/06

Soluções

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z-2) + xy = 2\}$ é uma superfície.

   Verdadeiro, pois $S = f^{-1}(2)$ onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = z(z-2) + xy$, é uma função suave, e 2 é um valor regular de f. De facto, $\nabla_f(x, y, z) = (y, x, 2z-2)$ só se anula no ponto $(0, 0, 1)$ e este ponto não é um ponto de S.

   (b) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e para qualquer $a \in f(U)$, $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ é uma superfície.

   Falso: o cone duplo $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ coincide com $f^{-1}(0)$ para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, mas pelo que vimos nas aulas, C não é uma superfície.

2. (a) Como se define um vector tangente a uma superfície S num ponto $p \in S$?

   Um vector $v \in \mathbb{R}^3$ diz-se *tangente* a S em p caso exista uma curva γ em S, passando por p, à qual v seja tangente nesse ponto; ou seja, caso exista uma curva $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$ para algum t_0 em I.

   (b) Seja

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & (0,2) \times (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (u \cos v, u \sin v, u) \end{array}$$

   um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (0, 1, 1)$. O vector $(-1, -1, -1)$ é tangente a S no ponto p? (Justifique a resposta.)

   Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 1)$$

   e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

   então, em $p = \sigma(1, \frac{\pi}{2})$, temos $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(1, \frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 0)$. Portanto $(-1, -1, -1)$ será tangente a S em p se e só se for combinação linear dos vectores $(0, 1, 1)$ e $(-1, 0, 0)$, ou seja, for do tipo $(-\beta, \alpha, \alpha)$ para algum par de reais α e β, o que é o caso ($\alpha = -1$ e $\beta = 1$).
