Duração: 30m **Teste 3B** 27/04/06

Soluções

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ é uma superfície.

   Verdadeiro: a função $\sigma : U \to G_f$, definida por $\sigma(x, z) = (x, f(x, z), z)$, é um mapa global de G_f, uma vez que se trata de um homeomorfismo suave definido num aberto de $\mathbb{R}^2$, cuja matriz jacobiana

   $$J_\sigma(x,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   tem característica 2.

   (b) Cada ponto p da superfície obtida por rotação, de ângulo $v \in (0, 2\pi)$, em torno do eixo OZ, da curva $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I$, tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, g(u), f(u)\sin v)$.

   Falso, pois o ponto p tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, uma vez que a rotação em torno de OZ mantém a altitude $g(u)$ do ponto $\gamma(u)$ em rotação.

2. Para cada $c \in \mathbb{R}_0^+$ considere $S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = c\}$.

   (a) Mostre que S_c é uma superfície para $c \neq 0$.

   $S_c = f^{-1}(c)$, para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$. Como $\nabla_f(x, y, z) = (2xy^2 + 2xz^2, 2yx^2 + 2yz^2, 2zx^2 + 2zy^2)$, este vector anula-se nos pontos (x, y, z) tais que $x = y = 0$ ou $x = z = 0$ ou $y = z = 0$ (isto é, em $OX \cup OY \cup OZ$). Mas, para $c \neq 0$, nenhum destes pontos pertence a S_c, o que mostra que c é um valor regular de f e S_c é então uma superfície.

   (b) O vector $(-1, 2, 1)$ é tangente a S_1 no ponto $(1, 1, 0)$? (Justifique a resposta.)

   O vector $(-1, 2, 1)$ será tangente a S_1 em $(1, 1, 0)$ se e só se for ortogonal a $\nabla_f(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$, ou seja, se e só se $((-1, 2, 1) \mid (2, 2, 0)) = 0$, o que não é verdade.
